

Université de Mohamed Khider Biskra
Faculté des Sciences et de la Technologie
Département : Génie électrique
Ref. :



جامعة محمد خيضر بسكرة
كلية العلوم والتكنولوجيا
قسم : الهندسة الكهربائية
المرجع :

Thèse présentée en vue de l'obtention
Du diplôme de
Doctorat en sciences en : Génie Electrique
Spécialité (Option) : Electrotechnique

ESTIMATION DE LA PROBABILITE DE DETECTION DANS LE CONTROLE NON DESTRUCTIF PAR COURANTS DE FOUCAULT

Présentée par :
Djamel Eddin ABDELLI

Soutenue publiquement le 15/04/2021

Devant le jury composé de :

Salah Eddine ZOUZOU	Professeur, Université de Biskra	– Président
Ahmed CHERIET	Professeur, Université de Biskra	– Rapporteur
Mohamed SAHRAOUI	MCA, Université de Biskra	– Examineur
Samir BENSAID	Professeur, Université de Bouira	– Examineur
Hichem ALLAG	Professeur, Université de Jijel	– Examineur
Stéphane CLÉNET	Professeur, Arts et Métiers, Lille, France	– Examineur

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été effectué au sein du Laboratoire de génie électrique de Biskra (LGEB). Je tiens à remercier Mr. le Professeur S. E. ZOOUZOU, directeur du laboratoire, pour son accueil et pour sa confiance qu'il m'a accordée.

Je remercie Mr. le professeur A. CHERIET pour la confiance qu'il m'a témoignée et pour l'honneur qu'il m'a fait en tant que rapporteur.

Je tiens également à remercier :

- Mr. S. E. ZOOUZOU, Professeur à l'université de Biskra, directeur du laboratoire LGEB pour avoir accepté d'être le président du jury.
- Mr. M. SAHRAOUI, Professeur à l'université de Biskra, pour avoir accepté d'être dans mon jury.
- Mr. S. BENSAID, Professeur à l'université de Bouira, pour avoir accepté d'être membre dans mon jury.
- Mr. H. ALLAG, Professeur à l'université de Jijel, d'avoir accepté de participer à mon jury.
- Mr. S. CLÉNET, Professeur, Arts et Métiers Paris Tech, Lille France, pour l'aide précieuse et les conseils qu'il m'a apportée au long des années de cette thèse malgré ses responsabilités importantes, et pour l'accueil au sein du laboratoire L2EP de Lille.

Je le remercie également, pour les discussions fructueuses effectuées à distance par internet. C'est un grand honneur qu'il m'a fait en acceptant de participer à ce jury.

Je tiens aussi à remercier Mme. T. T. NGUYEN, maître de conférences à l'université de Lille1 France, pour la confiance qu'elle m'a témoignée en m'accueillant au sein du laboratoire L2EP de Lille pendant la période de mon stage.

J'adresse également mes remerciements à Mr. le chef de département de génie électrique de l'université de Biskra pour la confiance qu'il m'a accordée en me permettant d'enseigner durant cette période.

Egalement, je remercie Mr. le directeur du laboratoire (LMSE) et l'ensemble des enseignants. Aussi, je n'oublie pas tous les enseignants chercheurs pour les nombreuses discussions durant cette période.

Table de Matières

Introduction Générale.....	1
----------------------------	---

Chapitre I : Probabilité de Détection et Contrôle non Destructif

I.1 Méthodes de contrôle non destructif.....	4
I.1.1 Inspection visuelle	4
I.1.2 Inspection par radiographie.....	5
I.1.3 Inspection ultrasonique	5
I.1.4 Inspection par particules magnétiques	6
I.1.5 Inspection par courants de Foucault	7
I.1.5.1 Différents types des capteurs utilisés dans le CND-CF	7
I.1.5.2 Avantages du CND-CF	8
I.1.5.3 Limites du CND-CF.....	9
I.2. Outils indispensables dans la détection des défauts.....	9
I.2.1 Introduction.....	9
I.2.2 Incertitudes de la méthode du CND-CF.....	9
I.2.3 Terme de la probabilité de détection POD.....	9
I.2.4 Fonction de la densité de probabilité PDF	10
I.2.5 Estimation de la POD.....	11
I.2.6 Méthode de Berens	12
I.2.7 POD par génération de PDF conditionnelle.....	13
I.2.8 Modèles de la POD	14
I.2.8.1 Modèle expérimental	14
I.2.8.2 Modèle numérique	14
I.2.8.3 Metamodel	15
I.3 Conclusion	15

Chapitre II : Modélisation Electromagnétique et Stochastique

II.1 Modélisation du problème électromagnétique	16
II.1.1 Domaine continu.....	16

II.1.1.1 Généralités	16
II.1.1.2 Equations de Maxwell	17
II.1.1.3 Lois de comportement	18
II.1.1.4 Conditions aux limites	19
II.1.1.5 Formulations électromagnétiques.....	20
II.1.1.5.1 Formulation $A-\phi$ du problème magnétodynamique.....	21
II.1.1.5.2 Formulation $T - \Omega$ du problème magnétodynamique	22
II.1.1.5.3 Formulation utilisée pour le problème CND-CF 2D	23
II.1.2 Domaine discret.....	24
II.1.2.1 Mise en oeuvre de la méthode des volumes finis	24
II.1.2.2 Discrétisation de la formulation en potentiel vecteur magnétique	25
II.1.2.3 Méthodes de résolution.....	27
II.1.2.4 Equation de l'impédance dans un problème CND-CF	28
II.2 Modélisation stochastique	28
II.2.1 Calcul de la moyenne et l'écart type par Monte Carlo	28
II.2.2 Calcul de la moyenne et l'écart type par la méthode de quadrature.....	29
II.2.3 Estimation de la fonction de densité de probabilité.....	30
II.2.4 Méthode du metamodel	31
II.2.4.1 Méthode de Monte Carlo	34
II.2.4.2 Méthode de projection	34
II.2.4.3 Méthode de régression.....	35
II.2.5 Analyse de sensibilité	36
II.2.5.1 Contexte.....	36
II.2.5.2 Indices de Sobol.....	36
II.2.5.2.1 Indices de Sobol basés sur la variance.....	36
II.2.5.2.2 Décomposition de l'ANOVA.....	37
II.2.5.2.3 Indices de Sobol et le chaos polynomial	38
II.2.6 Exemple d'application.....	41
II.3 Conclusion	43

Chapitre III : Estimation de la Probabilité de Détection d'un Problème de CND-CF

III.1 Description du problème d'étude	44
---	----

III.2 Approche stochastique de la géométrie du problème.....	46
III.3 Résolution du problème par une approche déterministe	48
III.4 Résolution du problème par une approche stochastique	50
III.4.1. Approche stochastique par remaillage	50
III.4.2. Approche stochastique par transformation géométrique.....	58
III.5 Réduction de la variance et estimation de la POD	62
III.6 Effet de la densité du maillage	65
III.7 Conclusion.....	67
Conclusion Générale	68
 Annexes	
Annexe A : Effet de Peau	69
Annexe B : Discrétisation par la Méthode des Volumes Finis du Gradient	72
Annexe C : Théorie de Probabilité.....	76
Annexe D : Transformation Géométrique.....	79
Bibliographie.....	85

Liste des Figures

Chapitre I : Probabilité de Détection et Contrôle non Destructif

Fig.I.1 Inspection par ressuage.....	4
Fig.I.2 Inspection par radiographie.	5
Fig.I.3. Inspection ultrasonique.....	6
Fig.I.4 Examen par particules magnétiques.	6
Fig.I.5 Génération des courants de Foucault dans une plaque conductrice.	7
Fig.I.6 Schématisation de la détection d'une fissure par courants de Foucault	8
Fig.I.7 Capteur absolu.	8
Fig.I.8 Capteur différentiel.....	9
Fig.I.9 Probabilité de détection POD.	11
Fig.I.10 Densité de probabilité PDF : avec et sans défaut.	12

Chapitre II : Modélisation Electromagnétique et Stochastique

Fig.II.1 Domaine d'étude et ses frontières.	18
Fig.II.2 Problème type magnétodynamique.	21
Fig.II.3 Diagramme de Tonti appliqué en magnétodynamique.	22
Fig.II.4 Forme d'un élément 2D.....	25
Fig.II.5 Représentation d'un volume élémentaire.....	26
Fig.II.6 Schéma de l'exemple d'application.	42
Fig.II.7 PDF du courant électrique.....	43

Chapitre III : Estimation de la Probabilité de Détection d'un Problème de CND-CF

Fig.III.1 Description du problème de CND-CF.	44
Fig.III.2 Représentation axisymétrique du problème.....	45
Fig.III.3 Problème stochastique équivalent.....	47
Fig.III.4 Histogrammes des paramètres d'entrée.	48
Fig.III.5 Impédance du capteur en fonction de la profondeur du défaut 'a'.	49
Fig.III.6 Courbe de la probabilité détection des défauts $POD(a)$	50

Fig.III.7 Algorithme du modèle numérique stochastique.	51
Fig.III.8 PDF de l'impédance stochastique du capteur : avec et sans défaut.	52
Fig.III.9 Erreur de l'impédance.	54
Fig.III.10 POD estimée par RM et comparée avec celle du metamodel.	55
Fig.III.11 Indice de sensibilité pour un défaut de profondeur $a = 0.4735$	56
Fig.III.12 Indice de sensibilité total pour $a = 0.4735$	57
Fig.III.13 Indice de sensibilité de premier ordre pour tous les défauts.	57
Fig.III.14 Indice de sensibilité total pour tous les défauts.	58
Fig.III.15 Domaine géométrique.	59
Fig.III.16 PDF de l'impédance du capteur par les méthodes RM et GT.	60
Fig.III.17 PDF de l'impédance du capteur par GT et metamodel.	60
Fig.III.18 POD estimée par GT et GT accompagnée du metamodel.	61
Fig.III.19 POD estimée par les méthodes GT et RM.	62
Fig.III.20 Estimation de la POD et réduction de la variance.	63
Fig.III.21 Confrontation des POD.	63
Fig.III.22 Indice de sensibilité de premier ordre.	64
Fig.III.23 Indice de sensibilité total.	64
Fig.III.24 Différentes densités du maillage.	65

Liste des Tableaux

Tableau.II.1 Polynômes orthogonaux.	34
Tableau.II.2 Variation de l'erreur en fonction du degré de polynôme.....	44
Tableau.III.1 Dimensions du problème, en mm.....	46
Tableau.III.2 Paramètres aléatoires du problème stochastique.	47
Tableau.III.3 Valeur moyenne et écart type de \hat{Z}_{RM}	53
Tableau.III.4 Moyenne de Z_{RM} et Z_{GT} pour les maillages S_i	66
Tableau.III.5 Ecart type de Z_{RM} et Z_{GT} pour les maillages S_i	66
Tableau.III.6 POD obtenue par RM et GT pour différentes densités du maillage.....	67

Liste des abréviations

CND Contrôle non destructif
CF Courants de Foucault
POD Probabilité de détection
MVF Méthode des volumes finis
PDF Fonction de densité de probabilité
PFA Probabilité de fausse alarme
2D Deux dimensions
MCS Méthode de Monte Carlo
KDE Estimation par noyau (kernel density estimation)
PC Chaos polynomial
PCE Expansion de chaos polynomial
QRN Quasi Random Number
LAR Régression par moindres angles (least angle regression)
GT Transformation géométrique
RM Remaillage

Introduction Générale

Le contrôle non destructif (CND) est un ensemble de méthodes et procédures qui permettent de caractériser l'état d'une pièce ou d'une structure sans dégradation. Parmi les méthodes les plus utilisées en particulier pour détecter les défauts, le ressuage, la magnétoscopie, les courants de Foucault et les ultrasons [Dumont-Fillon 1996, Trillon 2010]. Pour l'examen des composants métalliques, nous trouvons les méthodes électromagnétiques à savoir la magnétoscopie et les courants de Foucault. Cette dernière méthode est beaucoup plus adaptée pour les matériaux conducteurs du courant électrique.

Pour les tubes et plaques métalliques, le CND par courants de Foucault (CF) est le plus utilisé [Trillon 2010]. En effet, pour minimiser le risque d'un défaut qui peut grandir au-delà d'une taille dite critique pendant l'utilisation, la capacité du CND consiste à le caractériser d'une manière statistique [Beddak 2012, Rosell 2012, Abdelli 2019]. Cette caractérisation par le CND est souvent accompli par une probabilité de détection [Berens 1988, Gandossi 2010, Le Gratiot 2017, Abdelli 2019]. Cette probabilité de détection dite POD (*probability of detection*) est souvent fonction d'un paramètre d'intérêt qui est la taille de défaut [Abdelli 2019]. La courbe caractéristique de la POD varie selon la méthode du CND employée, le type du matériau inspecté et selon sa géométrie ainsi que l'outil statistique utilisé.

Pour avoir un contrôle efficace, il est nécessaire de comprendre le modèle théorique par lequel est représentée l'interaction entre les différents paramètres du système étudié. Ce modèle est à la base du phénomène physique et qui consiste à une modélisation qui implique la solution des équations aux dérivées partielles EDP. Le système relatif au CND-CF peut être représenté par des équations électromagnétiques en se basant sur les équations de Maxwell. Généralement, ce système comprend principalement un capteur inductif et la pièce à inspecter. La difficulté de résoudre ces équations analytiquement, conduit à l'utilisation des méthodes numériques telles que les éléments finis MEF, les volumes finis MVF ou les différences finies MDF. Dans cette thèse la méthode MVF est choisie comme méthode de discrétisation. Cette méthode a pris une grande place dans le domaine de la modélisation électromagnétique à cause de sa simplicité de mise en oeuvre et sa précision.

Dans le cas du CND-CF, l'estimation de la POD est basée sur la génération d'un nombre de réalisations et d'enregistrement de la réponse du capteur inductif ; tension, courant ou impédance. De point de vue numérique, il s'agit de répéter la modélisation du modèle direct, qui peut être coûteuse en terme temps de calcul. En effet, cette opération consiste à répéter la construction du domaine géométrique c.-à-d., le remailler plusieurs fois. Cependant, pour éviter le remaillage du domaine géométrique pour chaque réalisation, la méthode de transformation géométrique est utilisée [Mac 2012]. Cette méthode est basée sur le changement de coordonnées des noeuds sans changer leurs connectivités.

Il s'agit plutôt de la loi de grands nombre, un grand nombre de réalisations est nécessaire afin d'estimer une quantité d'intérêt d'une façon stochastique [Clénet 2013]. Dans ce cas le calcul devient très coûteux, et pour aboutir à un temps de calcul admissible un modèle approximé dit 'metamodel' peut être utilisé. Cette étude est basée sur la modélisation des paramètres d'entrée qui sont supposée incertains, et par la suite de la quantification des sources d'incertitude. Dans le CND-CF, les paramètres d'entrée incertains portant sur la géométrie et les paramètres physiques de la pièce à inspecter et également sur les dimensions du capteur. Cependant, pour construire un 'metamodel' il existe différentes méthodes [Forrestre 2008] pour un ensemble de paramètres donnés, dite plan d'échantillonnage.

L'objectif principal de cette thèse consiste à l'estimation de la POD dans un problème de CND-CF de type tube-capteur. Le code de calcul basé sur la MVF ainsi que la POD sont développés sous l'environnement Matlab, tandis que le mailleur GMSH est exploité pour la création de la géométrie et la génération du maillage. La reformulation en deux dimensions des équations de Maxwell en régime harmonique utilisant la formulation en potentiel vecteur magnétique est utilisée. Le 'metamodel' est construit en utilisant la méthode dite expansion du chaos polynomiale.

Cette thèse est organisée comme suit :

Le premier chapitre présente des généralités sur le contrôle non destructif et les principales méthodes utilisées telles que le ressuage, la magnétoscopie,...etc., en insistant sur la méthode basée sur les courants de Foucault qui fait l'objet de cette thèse. Egalement, dans ce chapitre les outils utilisés dans l'estimation de la probabilité de détection sont introduits.

Le deuxième chapitre comprend deux parties principales ; la première est consacrée à la modélisation électromagnétique des problèmes électromagnétiques, et la deuxième partie a pour objectif la modélisation stochastique qui introduit l'utilisation du 'metamodel' ainsi que le chaos polynomial à base des polynômes de Legendre. Aussi, l'analyse de la sensibilité globale du système est examinée par laquelle nous pouvons sélectionner les paramètres qui influencent la réponse stochastique du système de contrôle.

Le troisième chapitre concerne l'estimation de la probabilité de détection POD d'un problème de contrôle non destructif par courants de Foucault CND-CF. Le problème choisi comprend un tube métallique contenant un défaut circonférentiel et un capteur inductif de type absolu. La modélisation du problème direct est effectuée à l'aide de la méthode des volumes finis MVF. Concernant la modélisation géométrique, nous avons considéré deux techniques ; la technique dite de remaillage et celle de transformation géométrique. Dans ce chapitre, l'approximation de la réponse stochastique représentée par l'impédance du capteur absolu est obtenue en utilisant le 'metamodel'.

Chapitre I

Probabilité de Détection et Contrôle non Destructif

Ce chapitre comporte deux parties ; la première partie a pour but d'introduire les différentes méthodes utilisées dans le contrôle non destructif et leurs fonctionnements en insistant sur la méthode des courants de Foucault, et la deuxième partie concerne l'estimation de la probabilité de détection POD dans le cas d'un problème de contrôle non destructif général.

I.1 Méthodes de contrôle non destructif

I.1.1 Inspection visuelle

Il s'agit de rechercher visuellement les défauts, c'est un le premier des précédés de contrôle. Il peut être effectué directement par un agent qualifié ou à l'aide d'un outil comme une loupe, une camera...etc. On peut citer le ressuage qui permet de révéler les défauts de surface d'une pièce (Fig.I.1). Cette méthode comporte trois étapes essentielles: premièrement l'application d'un fluide pénétrant, puis on élimine l'excès du pénétrant sur la surface, et enfin on applique une couche d'un fluide révélateur sur la surface de la pièce. La réaction du révélateur sur le pénétrant conduit à une variation de couleur/luminance, ce qui facilite le repérage des défauts.



Fig.I.1 Inspection par le ressuage [EW-512-6].

I.1.2 Inspection par radiographie

Elle est basée sur la variation de l'absorption de la pénétration de radiation qui peut être contrôlée par la détection de la radiation inabsorbée passée à travers le matériel testé. La radiographie souvent réfère à une méthode radiographique par laquelle est produite une image permanente sur un film ou un papier (Fig.I.2). En effet, deux techniques peuvent être rencontrées ; la radiographie de film et la radiographie en temps réel (radioscopie).

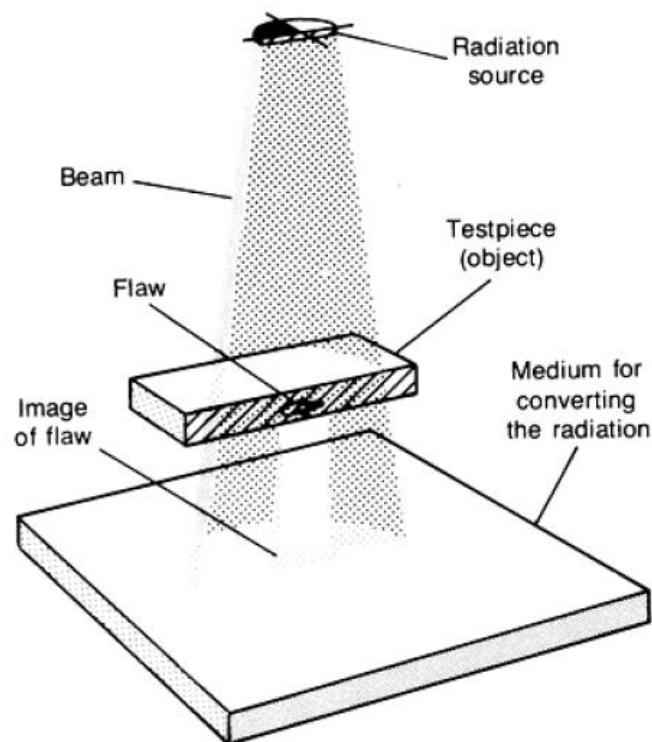


Fig.I.2 Inspection par Radiographie [Bryant. 1985]

I.1.3 Inspection ultrasonique

L'inspection ultrasonique est une méthode non destructive dans laquelle des faisceaux d'onde à haute fréquence sont introduites dans la pièce à tester à l'aide d'un transducteur (Fig.I.3). Elle est valable surtout pour les défauts surfaciques ou sous surfaciques. Le faisceau réfléchi est affiché et ensuite analysé afin de détecter la présence et également la localisation des défauts ou discontinuités. [Schmerr 2007]. L'inspection ultrasonique est faite souvent dans une plage entre 0.1 et 25 MHz.

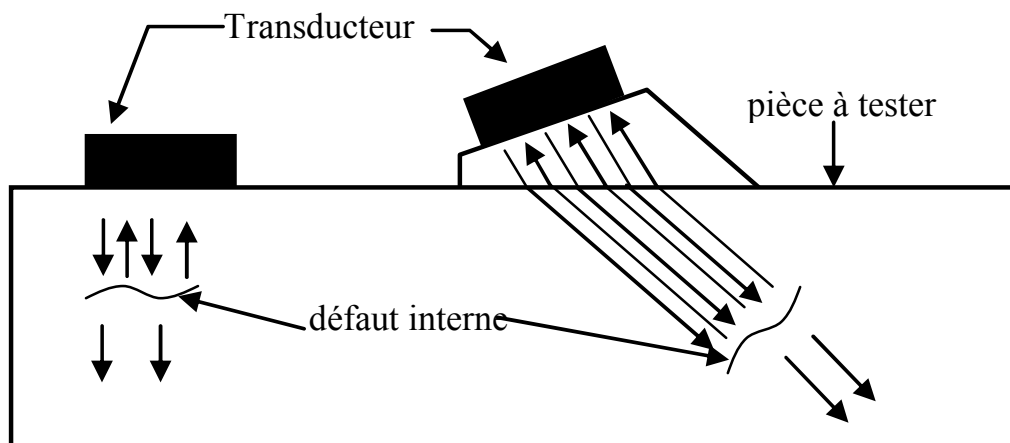


Fig.I.3. Inspection ultrasonique.

I.1.4 Inspection par particules magnétiques

La présence d'un entrefer dans un circuit magnétique entraîne un fort accroissement local de la reluctance du circuit et donc de la différence de potentiel magnétique, constituant ainsi un obstacle au flux magnétique (Fig I.4a). Ce phénomène est à la base d'un procédé de détection des défauts dans les aciers dit magnétoscopie. Dans la phase du contrôle, on observe visuellement une accumulation de poudre de fer (Fig I.4b). En magnétoscopie, on recueille la trace magnétique du flux sur un film, une bande ou une pâte d'empreinte magnétisable.

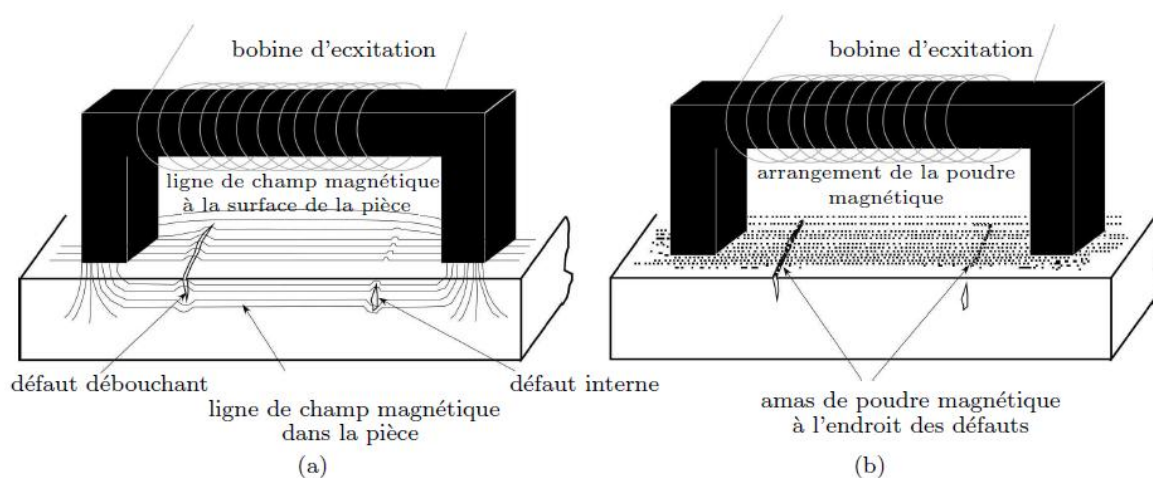


Fig.I.4 Examen par particules magnétiques [Dumont Fillon 1996].

I.1.5 Inspection par courants de Foucault

Le principe du CND-CF consiste à soumettre la cible sous un champ magnétique variable afin de créer des courants induits dits « courants de Foucault » (Fig.I.5). L'intensité de ces courants est en fonction des paramètres physiques de la cible (conductivité électrique et perméabilité magnétique) et sa géométrie.

L'avantage de cette méthode est son faible coût et sa facilité d'implantation pour l'inspection en temps réel. Cette méthode nécessite d'avoir une grande conductivité électrique. Cependant, l'atténuation du champ magnétique dans les conducteurs à cause de l'effet de peau (pour plus de détails voir Annexe A) impose une faible pénétration du champ et par conséquent influence la qualité de l'inspection.

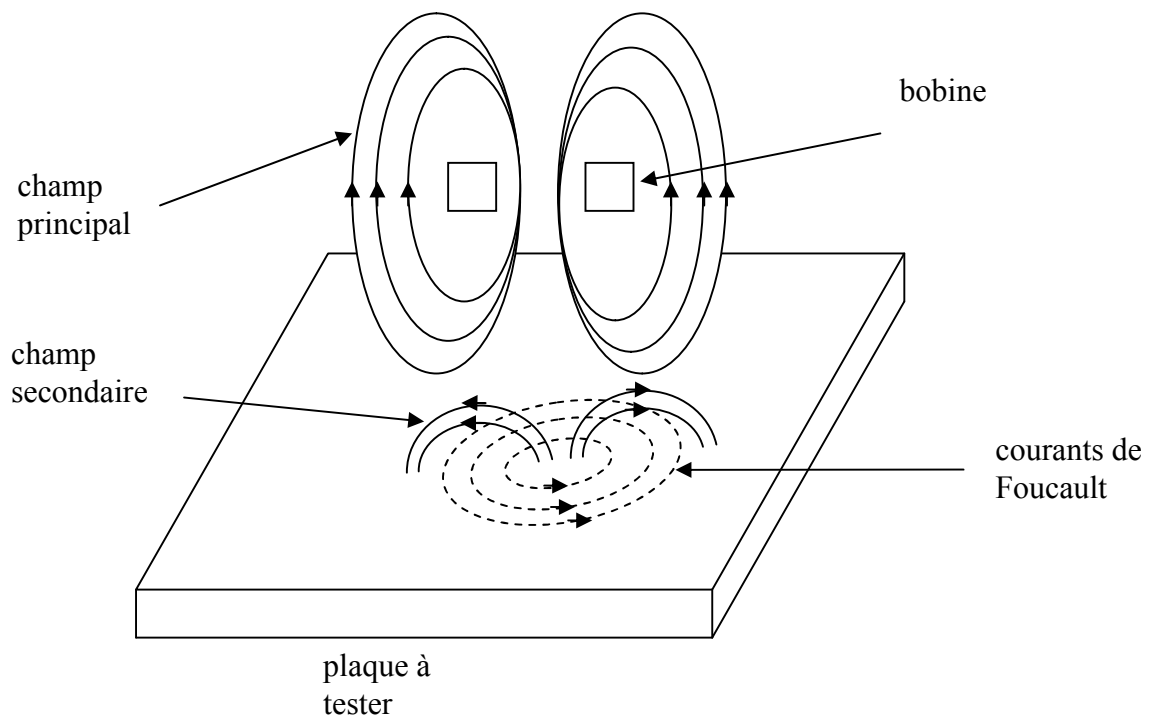


Fig.I.5 Génération des courants de Foucault par une bobine dans une plaque conductrice.

I.1.5.1 Différents types des capteurs utilisés dans le CND-CF

Il existe de nombreuses façons pour réaliser et classer les sondes (capteurs) à courants de Foucault. Citons les deux types les plus rencontrés :

➤ **Capteur absolu**

C'est un capteur inductif constitué d'une seule bobine « probe » à double fonction, il est chargé des deux fonctions : émission et réception du champ magnétique (Fig.I.7). La mesure de l'impédance de la sonde informe sur la présence et l'ampleur du défaut.

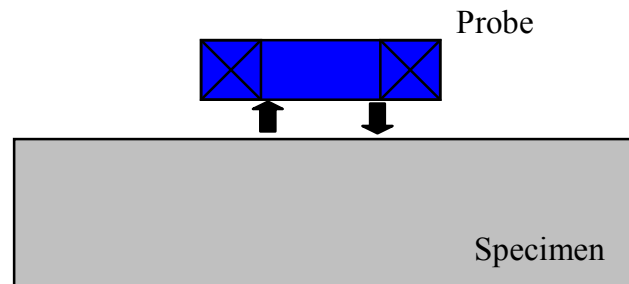


Fig.I.7 Capteur absolue.

➤ **Capteur différentiel**

C'est un capteur inductif constitué de deux bobines identiques, et il est chargé également de l'émission et de la réception du champ magnétique (Fig.I.8). La mesure de la différence d'impédances entre les deux bobines informe sur la présence et l'ampleur du défaut.

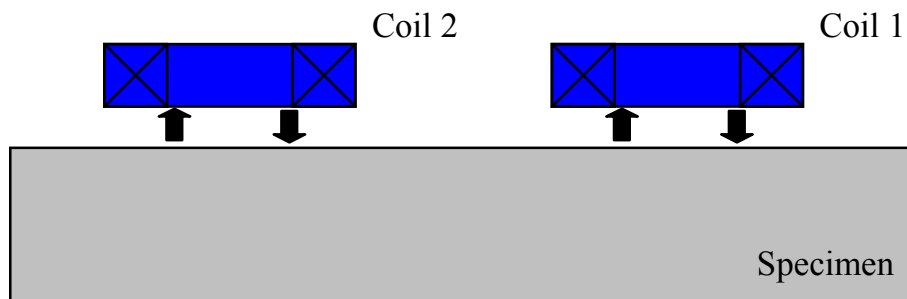


Fig.I.8 Capteur différentiel.

I.1.5.2 Avantages du CND-CF

- Inspection rapide, simple et fiable.
- Permet de détecter les défauts de surface et les défauts proches de la surface dans les matériaux conducteurs.
- Absence de pollution pour l'inspecteur/l'environnement (pas de produits chimiques).
- Peut être utilisé dans les endroits à accès difficile ou pénible à transporter.

- Bonne fiabilité et probabilité de détection (POD).
- Peut détecter les défauts à travers les revêtements de surface non conducteurs.

I.1.5.3 Limites du CND-CF

- Il s'applique uniquement aux matériaux conducteurs.
- La profondeur de détection est limitée.
- Les compétences et la formation requises sont plus poussées par rapport aux autres techniques de contrôle.

I.2. Outils indispensables dans la détection des défauts

I.2.1 Introduction

Dans cette section la probabilité de détection de défauts est présentée. Elle consiste à prendre une décision suite à l'analyse de deux signaux en la présence des bruits, le premier signal est la réponse du système sans la présence du défaut et le deuxième avec la présence du défaut. Dans les deux cas précédents un seuil est imposé pour distinguer entre les valeurs qui indiquent le défaut ou non. Les valeurs au-dessous du seuil sont considérées comme non détectées et les valeurs au-dessus du seuil sont considérées détectées.

I.2.2 Incertitudes de la méthode du CND-CF

Dans un problème de CND par CF les différents éléments constitutifs du système de détection ne sont pas complètement connus, donc une approche stochastique est introduite et les incertitudes des différents paramètres du système doivent être prises en compte. Parmi ces paramètres on cite la géométrie de la pièce à inspecter ainsi que ses paramètres physiques et la géométrie du capteur utilisé. Ces paramètres deviennent stochastiques et sont définis dans le contexte des lois probabilistes (loi normale, uniforme...etc.), sachant qu'ils sont propagés dans le système de résolution c.-à-d. le solveur numérique conduisant à des quantités de sortie qui sont aussi probabilistes

I.2.3 Probabilité de détection POD

Les méthodes de contrôle non destructif sont spécifiées pour l'exigence d'inspection des matériels ou composants pour maintenir la qualité nécessaire du matériel. En effet, la capacité de détecter un défaut forme la base du contrôle non destructif, lequel est centré sur la philosophie d'assurance de sécurité opérationnelle dans la présence d'un défaut. On suppose

un composant à inspecter admet d'avoir un défaut de taille a_0 , ce défaut grandit de telle sorte qu'il atteigne un défaut de taille critique a_f . La philosophie de l'inspection consiste à empêcher cette dernière manifestation [Panhuise 1989]. Cette hypothèse sollicite l'exigence de déterminer la probabilité de détection POD (Probability Of Detection) du CND. En effet, la fiabilité des techniques de CND est décrite par les fonctions de la probabilité de détection (POD). Une inspection idéale peut être représentée par une courbe de POD comme le montre la Fig.I.9. D'après cette caractéristique, les défauts au-dessous de la taille a_{NDE} ne sont pas détectés, par contre tous les défauts au-dessus sont détectés. Mais tant qu'il n'y a pas de système idéal, la POD est donc une courbe continue (realistic).

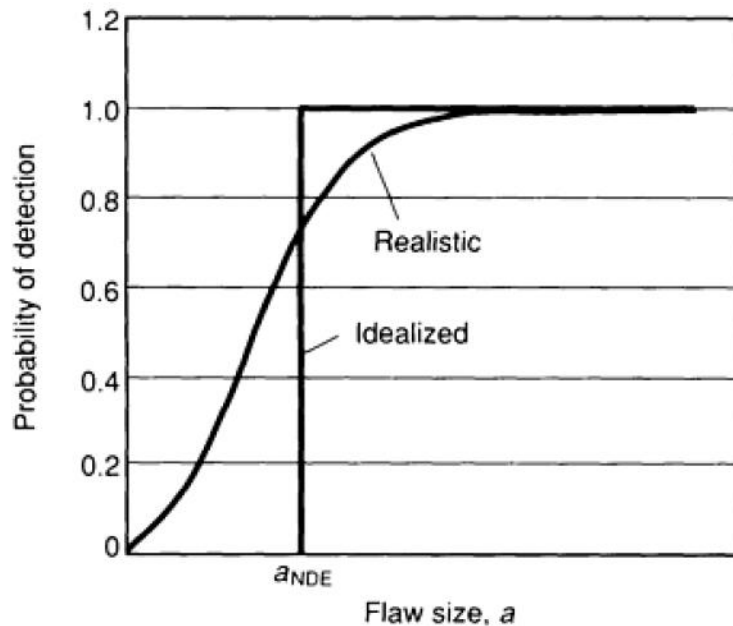


Fig.I.9 Probabilité de détection [Berens 1984, Panhuise 1989].

I.2.4 Fonction de la densité de probabilité PDF

Dans un système de CND les mesures sont relevées avec des variations inhérentes par rapport au processus de mesure et l'objet à tester. Dans ce cas, le signal de sortie doit être analysé par une fonction de densité de probabilité PDF (Probability Density Function). La Fig.I.10 montre deux signaux relatifs à un système de CND-CF dans les deux cas sans et avec défaut, tels que $p(Y|a_0)$ et $p(Y|a_1)$ sont les fonctions de densité de probabilité respectives. A cause de la variation de la géométrie de l'objet à inspecter, la non connaissance exacte des paramètres physiques (ne sont pas connus à 100%), alors il y a une marge d'incertitudes. Cela conduit à

contribution remarquable des bruits dans la procédure du contrôle. En effet, le ratio bruit/signal est un facteur important de discrimination entre les procédures de CND.

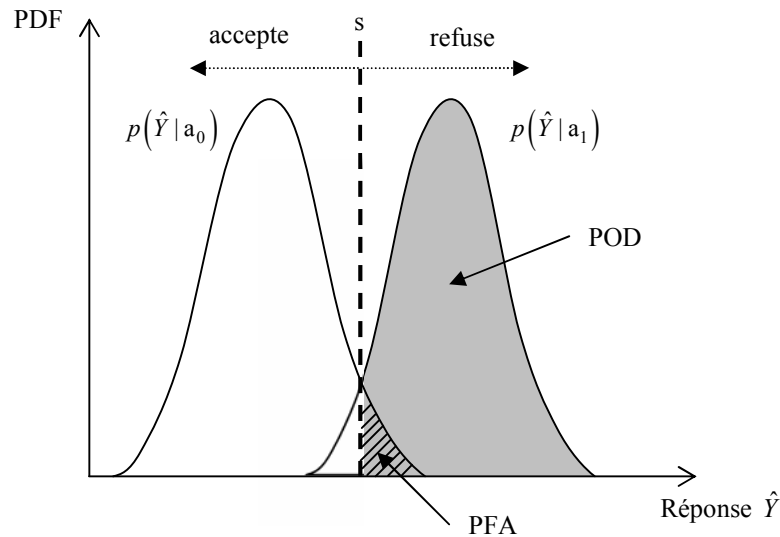


Fig.I.10 Densité de probabilité PDF : avec et sans défaut.

I.2.5 Estimation de la POD

Concernant la détection des dommages dans une structure à l'aide de l'estimation de la fiabilité du système du CND, l'ingénieur doit se focaliser principalement sur quatre différentes probabilités [Kabban 2011]: (i) la probabilité que le système détecte un dommage sans l'existence du dommage, (ii) la probabilité que le système détecte un dommage avec l'existence du dommage, (iii) la probabilité que le système ne détecte pas un dommage avec l'existence du dommage, (iv) la probabilité que le système ne détecte pas le dommage sans existence du dommage. Tant que la somme des probabilités de (i) à (iv) sont égales à un, il suffit d'évaluer les probabilités de (i) et (ii) qui sont successivement la probabilité de fausse alarme (PFA) et la probabilité de détection (POD). D'après la Fig.I.9, la POD et la PFA ne sont pas indépendantes, elles sont liées entre elles par le seuil (s) du système qui indique le niveau de la réponse au dessus du seuil pour laquelle est considérée comme dommage. Dans les années 1970, [Pettit 1972] ont introduit une simple méthodologie pour calculer la POD représentée par la moyenne de nombre des défauts détectés par rapport au nombre total des défauts, pour une taille de défaut donnée. Dans le travail de [Yee 1976] une loi binomiale

était proposée pour calculer l'intervalle de confiance sur l'estimation de la POD. Cette dernière approche est très coûteuse et demande souvent un très grand nombre d'essais. En 1981, [Berens 1981] ont proposé un model robuste et d'une exactitude très élevée, basé sur l'utilisation d'une fonction de régression.

I.2.6 Méthode de Berens

Soit ' a ' la taille du défaut, il existe une relation linéaire approximative entre $\ln(\hat{a})$ et $\ln(a)$ [Berens 1988], où cette relation est souvent exprimée par :

$$\ln(\hat{a}) = \alpha + \beta \ln(a) + \gamma \quad (I.1)$$

avec γ est un terme d'erreur et est normalement distribué avec une moyenne nulle et un écart-type constant. L'équation (I.1) exprime le fait que $\ln(\hat{a})$ est de distribution normale telle que $(\ln(\hat{a}) \sim N(\mu(a), \sigma_\gamma^2))$, avec $\mu(a) = \alpha + \beta \ln(a)$. La fonction $POD(a)$ peut être exprimée comme suit :

$$POD(a) = P(\ln(\hat{a}) > \ln(\hat{a}_{th})) \quad (I.2)$$

Tel que \hat{a}_{th} est le seuil d'évaluation des défauts. En utilisant la notation statistique standard, la POD peut être exprimée sous la forme :

$$POD(a) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(\hat{a}_{th}) - (\alpha + \beta \ln(a))}{\sigma_\gamma}\right) \quad (I.3)$$

Dans cette équation Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite. Il est facile de montrer, en utilisant les propriétés symétriques de la distribution normale, que :

$$POD(a) = \Phi\left(\frac{\ln(a) - \mu}{\sigma}\right) \quad (I.4)$$

avec une moyenne $\mu(a) = \frac{\ln(\hat{a}_{th}) - \alpha}{\beta}$ et un écart type $\sigma = \frac{\sigma_\gamma}{\beta}$. Les estimations des paramètres α , β , et σ_γ sont déduites à l'aide de la méthode dite «maximum de vraisemblance» [Berens 1988]. Ce modèle exige des conditions [Gandossi 2010, Annis 2007]:

- La réponse vs. le défaut doit être linéaire.
- Variance uniforme autour de la ligne réponse vs. le défaut.
- La réponse de la simulation doit être non corrélées.
- L'erreur doit être normal (approximativement)

I.2.7 POD par génération de PDF conditionnelle

Dans un procédé de CND, la probabilité de détection (POD) pour un défaut particulier de taille donnée peut être estimée par la génération d'une fonction de densité de probabilité (PDF). La figure précédente Fig.I.9 représente une distribution de la densité de probabilité PDF des deux signaux (deux réponses) avec et sans défaut ($p(Y|a_1)$ et $p(Y|a_0)$) respectivement d'un problème de CND-CF de type capteur-tube. La réponse du système de CND peut être interprétée comme un signal avec défaut autant qu'un signal sans défaut (bruit). La distinction entre les deux signaux peut être atteinte par l'imposition d'un seuil (s) qui aide dans la classification des signaux obtenus. Si le signal réponse obtenu est au-dessus du seuil prédéfini donc il s'agit d'un signal de défaut, dans le cas contraire il s'agit d'un bruit. La POD et la PFA sont déterminées par les expressions mathématiques suivantes :

$$POD = \int_s^{\infty} p(Y|a_1) dY \quad I.5$$

$$PFA = \int_s^{\infty} p(Y|a_0) dY \quad I.6$$

Si le défaut est de taille très petite, alors la moyenne de la fonction de densité de probabilité PDF en présence du défaut $p(Y|a_1)$ est réduite et est décalée à gauche, et chevauche pratiquement complètement celle sans défaut $p(Y|a_0)$. Par conséquent, la POD devient très petite. Si le défaut est d'une taille assez grande, la moyenne de $p(Y|a_1)$ augmente avec un

décalage à droite, donc les distributions sont écartées et la POD augmente. Les expressions précédentes peuvent être réécrites comme suite :

$$POD = P(Y(X) > s) = \frac{M_s}{M} \quad I.7$$

Dans l'équation (I.7), M_s est le nombre de défauts détectés et M est le nombre total de réalisations pour un défaut de taille donnée. De l'expression précédente, la POD peut être estimée par :

$$POD(a) = P(Y(X, a) > s) = \frac{M_s}{M} \quad I.8$$

I.2.8 Modèles de la POD

Plusieurs modèles existent pour estimer la POD. Ces modèles s'appuient soit sur les essais expérimentaux, soit sur les modèles numériques, soit sur modèles mathématiques.

I.2.8.1 Modèle expérimental

Ce modèle est basé sur un grand nombre des échantillons avec des défauts de tailles différentes [EPRI 2007]. La réponse de ces mesures expérimentales sera exploitée pour estimer la POD. Ici, l'estimation de la POD se fait par une méthodologie du ratio, le nombre de défauts détectés sur le nombre total des défauts réalisés. Le problème de ce modèle est malheureusement la nécessité d'un grand nombre d'échantillons afin d'obtenir une courbe de POD adéquate. Egalement, cette méthode est très coûteuse en terme du temps.

I.2.8.2 Modèle numérique

La modélisation des problèmes de CND a répondu largement pour concurrencer les modèles expérimentaux, ces modèles numériques qui sont utilisés pour estimer la POD s'appellent approches du modèle assisté de POD (MAPOD) [EPRI 2006, EPRI 2008]. Elle joint les outils de la statistique et la modélisation numérique elle a réduit considérablement le nombre d'échantillons ainsi que les opérateurs (physiciens et techniciens).

I.2.8.3 Metamodel

Le modèle mathématique (metamodel) [Zhiwei 2003] est utilisé pour remplacer le modèle numérique. La procédure consiste à générer une réponse relative à une taille réduite, ensuite l'approximée par un metamodel pour chaque taille de défaut. Sachant que les lois de probabilité ont besoin d'un nombre très important de réponses pour estimer une probabilité précise. Alors, le nombre de réalisations numériques sera très grand. Pour remédier à ce problème nous avons recours au metamodel. Le metamodel exige un nombre réduit de réponses, c-d-a. un nombre réduit des réalisations numériques. Une fois le metamodel construit, d'autres réponses du système peuvent être approximées et par conséquent la POD estimée. Dans les travaux de [Deng 2011], un modèle fonctionnel a été construit pour approximer la réponse du système et estimer la POD. Dans [Le Gratiet 2017], un modèle mathématique a été utilisé pour estimer la réponse d'un système de CND-CF qui repose sur la méthode de Berens. Pour notre part, dans cette thèse un metamodel basé sur les polynômes de Chaos [Ghanem 1991, Clénet 2013] et la régression (Least Angle Regression « LAR » [Nguyen 2016] vont être utilisés pour approximer la réponse d'un système de CND-CF.

I.3 Conclusion

Dans ce chapitre, les différentes méthodes du contrôle non destructif ont été rappelées. Ainsi la méthode du CND par courants de Foucault a été détaillée. Cette méthode est plus utilisée dans l'industrie à cause de ses avantages. L'estimation de la probabilité de détection, consiste à construire une courbe de POD en fonction de la variabilité de certains paramètres de la cible (profondeur, largeur de défaut,...etc.). Les différentes méthodes d'estimation de la POD ont été citées dans ce chapitre.

Chapitre II

Modélisation Electromagnétique et Stochastique

Dans ce chapitre, nous décrivons les équations et les différentes formulations mathématiques des problèmes électromagnétiques, ainsi que les lois de comportement des matériaux. La méthode des volumes finis choisie comme méthode de discrétisation sera détaillée et développée. Egalement, la modélisation stochastique sera décrite et l'approximation d'une réponse stochastique par les développement en chaos polynomial sera utilisée. L'analyse de la sensibilité globale sera introduite pour la quantification de l'influence des paramètres d'entrée sur la réponse stochastique du système.

II.1 Modélisation du problème électromagnétique

On considère le problème électromagnétique composé des objets suivants, l'air, un matériau conducteur (ou ferromagnétique) et une source. Ces éléments forment le domaine d'étude associé à une frontière sur laquelle est imposée des conditions aux limites. Les quatre équations de Maxwell avec les lois de comportement sont utilisées pour la modélisation de tel problème. Sur la base de ces équations, nous définissons les différentes formulations à savoir la formulation magnétostatique, magnétodynamique,...etc. Pour le faire, des potentiels dits scalaires et vecteurs seront introduits. Enfin nous introduirons la formulation spécifique au problème de contrôle non destructif par courants de Foucault dans le cas 2D.

II.1.1 Domaine continu

II.1.1.1 Généralités

Soit un domaine continu D qui représente le système d'étude avec sa frontière Γ . Il est constitué d'un inducteur traversé par une densité de courant J_s imposant un champ électromagnétique source. On suppose que la frontière Γ du domaine d'étude D a un vecteur normal unitaire \mathbf{n} , et est constituée de deux surfaces complémentaires Γ_E, Γ_H comme montré sur la Fig.II.1.

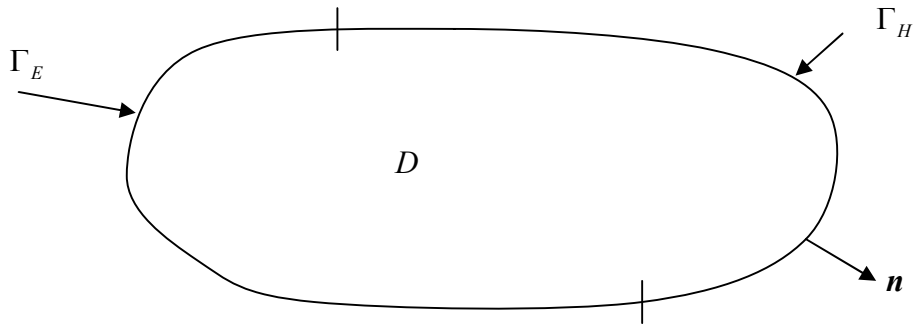


Fig.II.1 Domaine d'étude et ses frontières.

II.1.1.2 Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell constituent un système d'équations aux dérivées partielles qui permettent de décrire l'ensemble des phénomènes électromagnétiques [Ida 1992, Bossavit 1993, Le Menach 1999, Henneron 2004, Beddek 2002], soit :

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (\text{II.1})$$

$$\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{II.2})$$

$$\text{div}\mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.3})$$

$$\text{div}\mathbf{D} = \rho \quad (\text{II.4})$$

avec

\mathbf{H} : Champ magnétique (A/m).

\mathbf{D} : Induction électrique (C/m²)

\mathbf{E} : Champ électrique (V/m)

\mathbf{B} : Induction magnétique (T)

Les relations (II.1)-(II.2) expriment le lien entre les grandeurs électriques (\mathbf{E} , \mathbf{D}) et magnétiques (\mathbf{H} , \mathbf{B}). La variation temporelle de l'induction magnétique \mathbf{B} génère une variation spatiale du champ électrique \mathbf{E} . De même pour l'induction électrique \mathbf{D} et le champ magnétique \mathbf{H} . En électrotechnique (problèmes basses fréquences), les courants de

déplacement $\partial \mathbf{D} / \partial t$ sont négligés. D'après l'expression (II.1), la forme locale du théorème d'Ampère s'exprime ainsi :

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (\text{II.5})$$

II.1.1.3 Lois de comportement

Pour modéliser le comportement des matériaux, les relations (II.1)-(II.4) précisant la relation entre le champ magnétique et l'induction magnétique, et aussi entre la densité de courant et le champ électrique doivent être introduites. Dans un problème d'électrotechnique la conductivité électrique est supposée constante dans chaque milieu, et la densité de courant et le champ électrique sont liés par la loi d'Ohm :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (\text{II.6})$$

ou σ est la conductivité électrique ($\Omega^{-1}m^{-1}$). Pour le comportement magnétique, si on néglige le phénomène d'hystérésis et de saturation magnétique, on aura :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} \quad (\text{II.7})$$

Tels que μ_0, μ_r sont la perméabilité magnétique de l'air et la perméabilité relative du milieu considéré. Pour les matériaux magnétiques durs comme les aimants, le phénomène d'hystérésis doit être pris en compte [Jiles 1986, Le Menach 1999, Henneron 2004]. Si un aimant permanent est inséré dans le système, un terme de l'induction magnétique rémanente [Chavanne 1988, Henneron 2004] peut être ajouté à la relation (II.6), soit :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (\text{II.8})$$

avec \mathbf{B}_r est l'induction magnétique rémanente. La perméabilité magnétique μ et la conductivité électrique σ dépendent uniquement de la position. Donc, ces deux paramètres sont supposés indépendants aux variations des champs électromagnétiques. On obtient par conséquent un modèle linéaire.

II.1.1.4 Conditions aux limites

Le système des équations de Maxwell (II.1)-(II.4) et les lois de comportement (II.5)-(II.6) possèdent une infinité de solutions. Pour assurer l'unicité de la solution du système, il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites :

$$\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_H \quad (\text{II.9})$$

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_E \quad (\text{II.10})$$

On note que la frontière Γ du domaine D est décomposée en deux parties complémentaires Γ_H et Γ_E , avec $\Gamma_H \cap \Gamma_E = \emptyset$ et $\Gamma_H \cup \Gamma_E = \Gamma$ comme il est montré sur la Fig.II.1, ici \emptyset est l'ensemble vide. On note le courant source par \mathbf{J}_s et les courants induits dans les matériaux conducteurs par \mathbf{J}_{ind} , l'équation d'Ampère devient :

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_{ind} \quad (\text{II.11})$$

D'après les relations II.9 et II.11 on déduit

$$\text{div} \mathbf{J}_s = 0 \quad \text{sur } D \quad (\text{II.12})$$

$$\text{div} \mathbf{J}_{ind} = 0 \quad \text{sur } D \quad (\text{II.13})$$

Dans le domaine fréquentiel et comme le modèle est linéaire nous obtenons les équations suivantes [Beddek 2012] :

$$\text{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_{ind} \quad (\text{II.14})$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (\text{II.15})$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0 \quad (\text{II.16})$$

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho \quad (\text{II.17})$$

avec $\omega = 2\pi f$ est la pulsation. D'après l'équation (II.16), l'induction magnétique est à divergence nulle (conservation de l'induction magnétique). L'équation (II.17) représente la

conservation du courant électrique. Et les équations (II.14) et (II.15) sont les lois d'Ampère et de Faraday, respectivement.

II.1.1.5 Formulations électromagnétiques

Pour résoudre le modèle mathématique constitué par les équations de Maxwell de (II.14) à (II.17) et les lois de comportement associées de (II.5) à (II.6) avec les conditions aux limites imposées, il est nécessaire de les formuler autrement. En effet, plusieurs formulations ont été introduites à savoir les formulations en potentiels [Le Menach 1999, Henneron 2004, Beddek 2012]. Dans ce cas, les deux champs magnétique et électrique sont exprimés en fonction de potentiels (vectoriel ou scalaire). Les formulations en champs consistent à résoudre le problème en prenant les champs \mathbf{H} , \mathbf{B} comme grandeurs inconnues [Bossavit 2003]. Soit un domaine conducteur D_c , un inducteur (bobine) supposé alimenté par une densité de courant \mathbf{J}_s uniforme, et une région non conductrice \bar{D}_c ; ces trois éléments sont contenus dans un domaine grossier D (Fig.II.2).

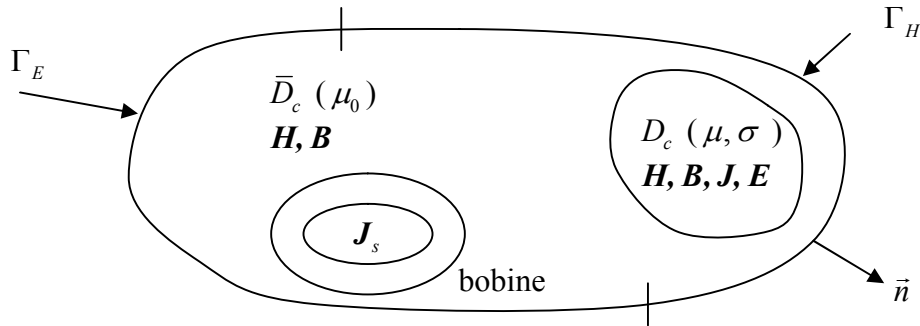


Fig.II.2 Problème type magnétodynamique.

Pour résoudre tel problème, l'utilisation de la formulation en potentiels est préférable. En effet, il peut être résolu par la formulation en potentiels ($A-\varphi$) ou par la formulation magnétique en potentiels ($T-\Omega$). Dans ce travail, nous avons opté la formulation en potentiels ($A-\varphi$).

II.1.1.5.1 Formulation $A-\varphi$ du problème magnétodynamique

Dans la formulation en potentiels, on exprime le champ magnétique en fonction du potentiel. Le diagramme de Tonti [Tonti 2000] appliqué en magnétodynamique est montré sur la Fig.II.3.

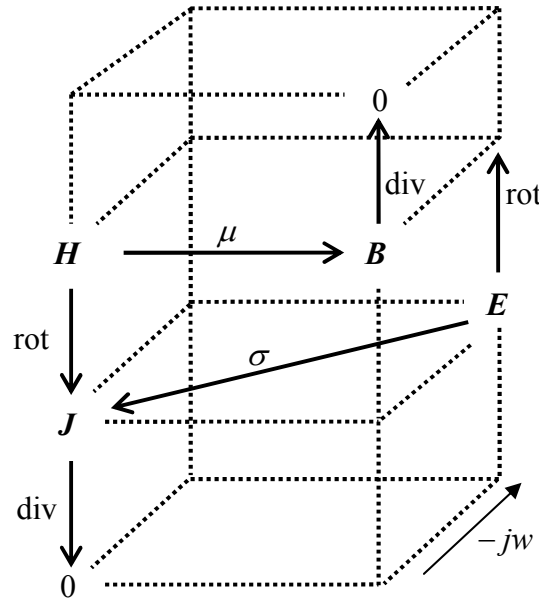


Fig.II.3 Diagramme de Tonti appliqué en magnétodynamique.

Dans cette formulation le champ électrique est exprimé en fonction d'un potentiel. D'après l'expression (II.16) de la divergence de l'induction, il existe un potentiel vecteur magnétique noté, tel que :

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A} \quad (\text{II.18})$$

avec $\mathbf{A} \times \mathbf{n}$ sur Γ_E . D'après les équations (II.15) et (II.18), le champ électrique \mathbf{E} peut être exprimé en fonction du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} :

$$\text{rot} \mathbf{E} = -j\omega \text{rot} \mathbf{A} \Rightarrow \text{rot}(\mathbf{E} + j\omega \mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad (\text{II.19})$$

D'après (II.19), il existe un gradient d'un potentiel scalaire électrique φ , tel que :

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \text{grad}\varphi \quad (\text{II.20})$$

avec

$$\varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_E \quad (\text{II.21})$$

On remplace le champ magnétique \mathbf{H} et la densité de courant \mathbf{J}_{ind} par leurs expressions en fonction du potentiel vecteur magnétique \mathbf{A} et le potentiel scalaire électrique φ , on obtient la formulation magnétodynamique suivante :

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\mathbf{A}\right) + \sigma(j\omega\mathbf{A} + \text{grad}\varphi) = \mathbf{J}_s \quad (\text{II.22})$$

Introduisons l'équation de conservation des courants induits \mathbf{J}_{ind} :

$$\text{div}(\sigma(j\omega\mathbf{A} + \text{grad}\varphi)) = 0 \quad (\text{II.23})$$

Les deux dernières équations admettent une infinité de solutions. Pour assurer l'unicité de la solution, un terme de jauge est souvent imposé [Kettunen 1999, Le Menach 1999, Henneron 2004, Bebbek 2012], telle que par exemple la jauge de Coulomb ($\text{div}\mathbf{A} = 0$).

II.1.1.5.2 Formulation $T - \Omega$ du problème magnétodynamique

Cette formulation s'exprime en fonction du potentiel du champ source \mathbf{H}_s , tel que $\text{rot}\mathbf{H}_s = \mathbf{J}_s$ et $\mathbf{H}_s \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ_H . Tant que la divergence de la densité de courant est nulle, cette dernière implique l'existence d'un potentiel vecteur électrique noté T , tel que :

$$\mathbf{J}_{ind} = \text{rot}\mathbf{T} \quad (\text{II.24})$$

avec

$$\mathbf{T} \times \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma_H \quad (\text{II.25})$$

D'après la loi d'Ampère (II.14), on a :

$$\text{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_s - \mathbf{T}) = \mathbf{0} \quad (\text{II.26})$$

Cette dernière expression implique l'existence d'un potentiel scalaire magnétique Ω qui vérifie :

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_s + \mathbf{T} - \text{grad}\Omega \quad (\text{II.27})$$

avec

$$\Omega = 0 \text{ sur } \Gamma_H. \quad (\text{II.28})$$

De même que la formulation précédente, pour assurer l'unicité de la solution, une condition de jauge doit être appliquée sur le potentiel T . Alors, la formulation $T - \Omega$ est écrite comme suit Equation ci dessous vrai seulement dans la zone conductrice pas ailleurs car $1/\sigma$ non définie. Le préciser et donner les équations sur le domaine non conducteur avec juste Ω .

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\text{rot}\mathbf{T}\right) + j\omega\mu(\mathbf{T} - \text{grad}\Omega) = -\text{rot}\left(\frac{1}{\sigma}\text{rot}\mathbf{H}_s\right) - j\omega\mu\mathbf{H}_s \quad (\text{II.29})$$

$$\text{div}(\mu(\mathbf{T} - \text{grad}\Omega)) = -\text{div}(\mu\mathbf{H}_s) \quad (\text{II.30})$$

II.1.1.5.3 Formulation utilisée pour le problème CND-CF 2D

Dans ce travail un problème de CND-CF dans le cas 2D sera étudié. Alors, la formulation présentée précédemment formulée en potentiels ($A - \varphi$) est choisie, et doit être simplifiée pour le cas 2D. Dans le cas 2D, l'équation (II.22) devient :

$$\text{rot}\left(\frac{1}{\mu}\text{rot}\mathbf{A}\right) + j\omega\sigma\mathbf{A} = \mathbf{J}_s \quad (\text{II.31})$$

Appliquons quelques règles connues sur l'opérateur 'rot', cette dernière équation peut être réécrite sous la forme suivante :

$$-div\left(\frac{1}{\mu} grad A\right) + j\omega\sigma A = J_s \quad (II.32)$$

Cette dernière équation représente la formulation adoptée pour la modélisation du problème CND-CF dans le cas 2D.

II.1.2 Domaine discret

Les formulations précédentes développées dans le domaine continu ne peuvent être résolues d'une manière analytique qu'avec une géométrie simple. Dans le cas d'un système complexe, pour résoudre ces équations nous avons besoin d'utiliser des méthodes numériques, et donc une discrétisation numérique est nécessaire [Tonti 2001]. Le principe de la discrétisation nécessite de décomposer le domaine d'étude D en un certain nombre de sous domaines élémentaires appelés éléments finis, volumes finis ou différences finies.

II.1.2.1 Mise en oeuvre de la méthode des volumes finis

Dans cette partie nous utilisons la méthode des volumes finis (MVF) pour discrétiser les équations aux dérivées partielles de la formulation en potentiel vecteur magnétique A développée précédemment. Dans le cas général 3D, on décompose le domaine géométrique D en petits volumes élémentaires de forme tétraèdres, prismes ou hexaèdres [Bossavit 1993], et dans le cas 2D on trouve la forme rectangulaire, parallélogramme ou triangulaire (Fig.II.4).

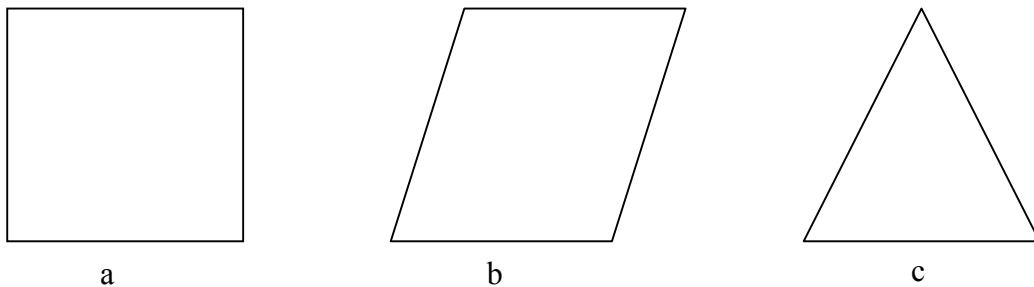


Fig.II.4 Forme de volume élémentaire : a)-rectangle, b)- parallélogramme, c)-triangle.

La forme de maillage utilisée dans ce travail est celle de parallélogramme ou rectangle. Dans la MVF, pour chaque volume élémentaire P on associe quatre facettes f_i avec ($i=1:4$ nombre des facettes de P) de distance $\Delta\eta_i$ (Fig.II.5). Le volume élémentaire P possède quatre volumes élémentaires voisins $N_i(i=1:4)$.

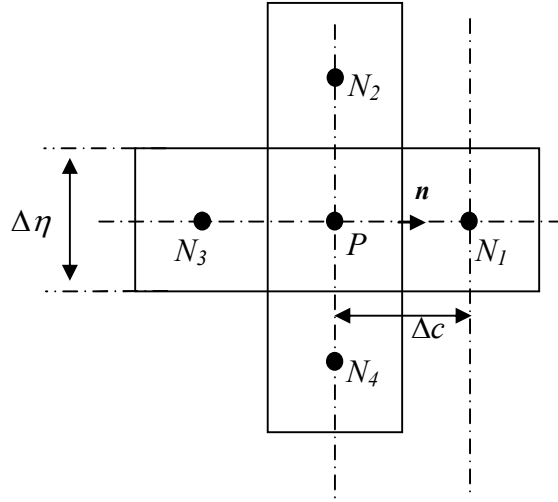


Fig.II.5 Représentation d'un volume élémentaire inconnu.

II.1.2.2 Discrétisation de la formulation en potentiel vecteur magnétique

La méthode MVF est basée sur l'intégration de l'équation EDP correspondante sur le volume élémentaire (P), soit :

$$-\iint_s \operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{grad} A \right) . ds + \iint_s j \omega \sigma A . ds = \iint_s J_s . ds \quad (\text{II.33})$$

➤ Intégration du terme source de l'équation (II.33) :

La densité de courant est supposée uniforme dans le sous domaine, alors l'intégration du terme source devient :

$$\iint_s J_s . ds = J_{sP} \Delta S \quad (\text{II.34})$$

avec J_{sP} est le courant source dans le volume élémentaire P .

➤ **Intégration du 2^{ème} terme de l'équation (II.33) :**

Ce terme représente la présence des courants induits dans le matériau conducteur, soit :

$$\iint_s j\omega\sigma \mathbf{A}.d\mathbf{s} = j\omega\sigma_p A_p \Delta S \quad (\text{II.35})$$

avec σ_p , A_p représentent la conductivité électrique et le potentiel vecteur magnétique dans le volume élémentaire P , respectivement.

➤ **Intégration du 1^{er} terme de l'équation (II.33) :**

L'intégration de ce terme est effectuée à l'aide du théorème de la divergence de Gauss. Il s'agit d'intégrer le terme $\frac{1}{\mu} \text{grad} \mathbf{A}$ autour des facettes entourant la surface du volume élémentaire P , dans la direction du vecteur normal sortant de ces facettes. Soit

$$-\iint_s \text{div} \left(\frac{1}{\mu} \text{grad} \mathbf{A} \right) . d\mathbf{s} = \oint_{\Delta\eta_i} \frac{1}{\mu} \text{grad} \mathbf{A} . d\boldsymbol{\eta} . \mathbf{n} \quad (\text{II.36})$$

avec \mathbf{n} est le vecteur normal sortant de la facette (arrête). Si le vecteur normal \mathbf{n} et le segment qui lie entre les deux noeuds des volumes élémentaires, P , N_i sont superposés, alors le maillage est dit orthogonal, et nous permet d'écrire :

$$\oint_{\Delta\eta_i} \frac{1}{\mu} \text{grad} \mathbf{A} . d\boldsymbol{\eta} . \mathbf{n} = \sum_f \frac{1}{\mu_i} \frac{A_{N_i} - A_p}{\Delta c_i} \Delta\eta_i \quad (\text{II.37})$$

Tel que Δc_i est la distance entre P , N_i . Si le maillage n'est pas complètement orthogonal, ce dernier résultat de l'intégration doit être corrigé. Dans ce travail, nous avons opté pour la formulation développée dans [Mathur 1997] et [Versteeg 1995]. Pour plus de détail sur la correction dans le cas non orthogonal voir « Annexe B ». Après intégration de tous les termes, on trouve une équation algébrique finale de la forme :

$$\sum_f \left\{ \frac{1}{\mu_i} \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_c} (A_{N_i} - A_p) \frac{\Delta \eta_i}{\Delta c_i} - \frac{1}{\mu_i} \frac{\mathbf{e}_c \cdot \mathbf{e}_\eta}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_c} (A_b - A_a) \right\} + j\omega \sigma_p A_p \Delta S = J_{sp} \Delta S \quad (\text{II.38})$$

Cette dernière équation algébrique relative au problème électromagnétique 2D peut être utilisée également pour la modélisation d'un problème de CND-CF. Sous forme matricielle, l'équation (II.38) peut être réécrite comme suit :

$$CA = B \quad (\text{II.39})$$

Dans (II.39), C représente une matrice à coefficients constants, A représente le vecteur du potentiel A_p et B le vecteur source. Cette dernière équation matricielle peut être résolue par des solveurs directs ou itératifs (Gauss-Seidel, Jacobi,...etc.).

II.1.2.3 Méthodes de résolution

➤ Méthodes directes :

Les méthodes directes sont appliquées pour les systèmes linéaires de petite taille. La précision et l'exactitude sont élevées mais l'occupation l'espace mémoire et le temps de calcul important les rend coûteuses. On trouve comme méthodes directes la méthode de Cramer, de Gauss,...etc.

➤ Méthodes itératives :

Les méthodes itératives sont adaptables aux matrices de grandes tailles. On cite les méthodes suivantes :

➤ Méthode de Gauss Seidel :

Dans la méthode de Gauss-Seidel, le système $CA = B$ est transformé en un ensemble d'équations linéaires de la forme :

$$A_i^{k+1} = \frac{\left(\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} c_{ij} A_j^{k+1} \right] - \sum_{j=i+1}^n c_{ij} A_j^k \right)}{c_{ii}}; \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (\text{II.40})$$

avec $c_{ii} \neq 0, \forall i$ et A^0 est donné. Dans cette méthode, on itère cette équation jusqu'à la vérification du critère d'arrêt suivant :

$$\left| A_i^{(k+1)} - A_i^k \right| < \varepsilon \text{ ou } \left(\left| A_i^{(k+1)} - A_i^k \right| / A_i^k \right) < \varepsilon \quad (\text{II.41})$$

avec k est le numéro de l'itération et ε est la précision prédéfinie.

➤ Méthode de Jacobi:

Cette méthode est basée sur une transformation à la forme suivante :

$$A_i^{k+1} = \frac{\left(b_i - \sum_{j=1}^n c_{ij} A_j^k \right)}{c_{ii}}; \quad (i \neq j); \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (\text{II.42})$$

Comme dans le cas de la méthode de Gauss-Seidel, on commence le calcul par une valeur initiale arbitraire $A_i^0 (k=0)$ et on itère jusqu'à la vérification du critère d'arrêt prédéfini.

II.1.2.4 Equation de l'impédance dans un problème CND-CF

Dans une application de CND-CF, le calcul l'impédance électrique (Z) du capteur (bobine) peut effectué en utilisant la loi de Faraday et le théorème de Stokes [Ida 1992] :

$$Z = - \frac{j\omega \oint A \cdot dl}{\int_D \mathbf{J}_s \cdot d\mathbf{D}} \quad (\text{II.43})$$

Cette équation (Z) est nécessaire pour l'analyse et la caractérisation des défauts dans un problème de contrôle non destructif. En effet, la valeur de Z ainsi que sa variation informe sur l'état de la pièce en inspection.

II.2 Modélisation stochastique

II.2.1 Calcul de la moyenne et l'écart type par Monte Carlo

La méthode de 'Monte Carlo Simulation' (MCS) est une technique de simulation qui utilise les nombres aléatoires. Soit $M(X)$ un simulateur numérique de paramètres d'entrées X , et $Y = M(X)$ une réponse aléatoire. Nous supposons que la réponse est une fonction de N valeurs de vecteurs d'entrées, tel que $X = \{x_{(1)}, x_{(2)}, \dots, x_{(N)}\}$. Dans cette méthode, l'estimation de la moyenne $\hat{\mu}_Y$ et de l'écart type $\hat{\sigma}_Y$ sont données par respectivement par les relations suivantes :

$$\hat{\mu}_Y = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N M(x^{(k)}) \quad (\text{II.44})$$

$$\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (M(x^{(k)}) - \hat{\mu}_Y)^2 \quad (\text{II.45})$$

Un intervalle de confiance est un intervalle spécifique défini par l'inégalité suivante :

$$\hat{\mu}_Y - z_{\alpha/2} \left(\frac{\hat{\sigma}_Y}{\sqrt{n-1}} \right) < \mu < \hat{\mu}_Y + z_{\alpha/2} \left(\frac{\hat{\sigma}_Y}{\sqrt{n-1}} \right) \quad (\text{II.46})$$

avec μ est la moyenne. Pour un intervalle de confiance de 95% on a $z_{\alpha/2} = 1.96$.

II.2.2 Calcul de la moyenne et l'écart type par la méthode de quadrature

Notons l'espérance mathématique par l'opérateur $E[.]$. La valeur moyenne (valeur espérée) de la variable aléatoire est donnée par l'équation :

$$\mu_X \equiv E[X] = \int_{D_X} x f_X(x) dx \quad (\text{II.47})$$

Pour une fonction $g(X)$ l'espérance est définie comme suit :

$$E[g(X)] = \int_{D_X} g(x) f_X(x) dx \quad (\text{II.48})$$

Et le moment d'ordre ' n ' de X est défini par :

$$\mu_X^n \equiv E[(X - \mu_X)^n] = \int_{D_X} (x - \mu_X)^n f_X(x) dx \quad (\text{II.49})$$

La moyenne et la variance de la réponse peuvent être estimées en utilisant les équations précédentes (II.42)-(II.44), soit:

$$\mu_Y \equiv E[Y] = \int_{D_X} M(x) f_X(x) dx \quad (\text{II.50})$$

$$\sigma_Y^2 \equiv E[(Y - \mu_Y)^2] = \int_{D_X} [M(x) - \mu_Y]^2 f_X(x) dx \quad (\text{II.51})$$

L'évaluation de l'intégrale dans (II.52) par la méthode de quadrature [Abramowitz 1970, Press 1992] consiste de l'approcher par une somme pondérée en un certain nombre de points du domaine d'intégration D_X . Une formule de quadrature monodimensionnelle permet d'approximer l'intégrale I comme suit :

$$I \equiv \int_D h(x) w(x) dx \approx \sum_{k=1}^v w_k h(x_k) \quad (\text{II.52})$$

Dans cette dernière équation $h(x)$ est une fonction carrée sommable respectant la mesure $\mu(dx) = w(x)dx$, v est l'ordre de quadrature $\{(w_k, x_k), k = 1, \dots, v\}$ sont les intégrations pondérées et leurs points associés pour la fonction pondérée $w: D \rightarrow \mathbb{R}$. Pour un vecteur aléatoire X des variables indépendantes, une quadrature de produit tensoriel peut être utilisée [Sudret 2000].

II.2.3 Estimation de la fonction de densité de probabilité

Pour estimer la fonction de densité de probabilité (PDF), nous avons utilisé la technique dite 'de noyau' KDE (kernel density estimation) [Silverman 1986]. Pour représenter la réponse $Y = \{y_{(1)}, y_{(2)}, \dots, y_{(N)}\}$ par une forme graphique, un histogramme est souvent construit.

En effet, cette représentation graphique peut être obtenue avec la technique KDE et qui est définie par la formule suivante :

$$f_Y(y) = \frac{1}{Nh} \sum_{i=1}^N K\left(\frac{y - y_i}{h}\right) \quad (\text{II.53})$$

Avec h est le ‘bandwidth’ et $K(x)$ est le noyau. Les noyaux les plus connus sont le noyau Gaussien et le noyau d’Epanechnikov. Le paramètre ‘bandwidth’ est sélectionné selon le choix du noyau et la taille des échantillons (N). La forme du noyau Gaussien s’écrit :

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right) \quad (\text{II.54})$$

Pour ce type de noyau, on a :

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}h} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - X_i}{h}\right)^2\right) \quad (\text{II.55})$$

Et le ‘bandwidth’ h est sélectionné en tenant compte la méthode de Silverman, soit :

$$h = 0.9 \frac{\hat{\sigma}}{N^{1/5}} \quad (\text{II.56})$$

avec

$$\hat{\sigma} = \min(s, R/1.34) \quad (\text{II.57})$$

avec s est l’écart type et R est interquartile.

II.2.4 Méthode du metamodel

Un ‘metamodel’ est une substitution d’un modèle numérique complexe en un modèle pour lequel l’exécution est très rapide.

Ce metamodel est construit avec l'échantillonnage du modèle original (modèle numérique). Nous citons quelques metamodels existants :

- le chaos polynomial (PC).
- les réseaux de neurones.
- le processus Gaussien (Krigage).
- les machines à support de vecteur SVM (support vecteur machine).

La méthode chaos polynomial (PC) dite aussi d'expansion de chaos polynomial (PCE) est une méthode probabiliste. Elle consiste à développer une fonction carrée sommable dans la base de polynômes orthogonaux (Hermite polynomial, Legendre,...etc.). Ce développement est basé sur la théorie des chaos homogènes [Wiener 1938, Cameron 1947], et est couramment utilisé dans le champ d'engineering par [Ghanem 1991]. Dans la suite, on considère que les paramètres d'entrée X sont des variables aléatoires indépendantes. Dans [Cameron 1947], il est montré que le chaos polynomial a une base orthonormale complète pour l'espace des fonctions carrées sommables (L^2). Et toutes les fonctions $f(x) \in L^2$ admettent la décomposition suivante :

$$Y = f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \Psi_j(x) \quad (\text{II.58})$$

avec f_i sont des coefficients à déterminer et $\Psi_j(x)$ sont des polynômes multivariés d'ordre j . Selon [Soize 2004], la représentation de chaos d'une réponse Y est :

$$Y = f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \phi_j(X_1, \dots, X_M) \quad (\text{II.59})$$

avec $\{\phi_j(X_1, \dots, X_M)\}_{j=0}^{\infty}$ est une base Hilbertian d'un espace de Hilbert approprié contenant la réponse. Si les paramètres d'entrées sont uniformes ou normales, il est possible d'utiliser une famille de polynômes multivariés Ψ (Hermite ou Legendre) pour la base Hilbertian ϕ . Alors, l'équation (II.59) devient :

$$Y = f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \Psi_j(\xi_1, \dots, \xi_M) \quad (\text{II.60})$$

En pratique l'expansion (II.60) doit être tronquée, et le degré de troncature du polynôme est P [Sudret 2008]. La formule de P s'écrit ainsi [Le Maître 2010] :

$$P = \frac{(M + p)!}{M! p!} \quad (\text{II.61})$$

avec M est le nombre de paramètres d'entrée et p est le degré de polynôme. L'équation (II.60) devient donc :

$$Y = f(x) \approx \hat{Y} = f_{LAR}(x) \sum_{j=0}^{P-1} f_j \Psi_j(\xi_1, \dots, \xi_M) \quad (\text{II.62})$$

Dans le Tableau.II.1 [Sudret 2007], on montre les familles des polynômes orthogonaux lesquels correspondant à la fonction de densité de probabilité.

Tableau.II.1 Polynomiaux orthogonaux

	Distribution	polynomial Orthogonal	Support
RV Continus	Gaussien	Hermite	$(-\infty, +\infty)$
	γ	Laguerre	$[0, +\infty)$
	β	Jacobi	$[a, b]$
	Uniforme	Legendre	$[a, b]$
RV Discret	Poisson	Charlier	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Binomial	Krawtchouk	$\{0, 1, 2, \dots, n\}$
	Binomial négatif	Meixner	$\{0, 1, 2, \dots\}$
	Hyper géométrique	Hahn	$\{0, 1, 2, \dots, n\}$

Plusieurs approches sont développées pour estimer les coefficients du chaos polynomial, citons deux approches ; approche intrusive [Le Maître 2002] et approche non intrusive [Sudret 2008, Blatman 2010, Beddek 2012, Nguyen 2016, Liu 2016]. L'approche intrusive consiste à introduire les coefficients directement dans le modèle numérique, et le modèle numérique doit être exécuté qu'une seule fois. Pour l'approche non intrusive le modèle numérique est supposé comme boîte noire. Dans ce cas, les coefficients du chaos polynomial sont déterminés après N simulation des variables d'entrée. Dans ce travail, nous nous intéressons à l'approche non intrusive. Parmi les méthodes non intrusives citons :

- Méthode de Monte Carlo.
- Méthode de projection.
- Méthode de régression.

II.2.4.1 Méthode de Monte Carlo

Cette méthode est basée sur un nombre d'échantillonnage très important pour approximer la valeur moyenne dans le sens du théorème 'central limite'. Supposons la réponse stochastique précédente $Y = \{y_1, \dots, y_M\}$ de $f(x)$. La moyenne empirique peut être calculée par l'expression (II.44) et l'écart type par (II.45). Et l'intervalle de confiance à 95% de la moyenne peut être calculée par l'expression (II.46). La convergence de la méthode de Monte Carlo est assez lente, et elle est proportionnelle à l'écart type $\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{N}}$. En effet, pour réduire le nombre d'échantillons et améliorer la convergence de cette méthode, il existe dans la littérature plusieurs techniques [Le Maître 2002], [Bucher 1990, Ferrari 2001] et [Keese 2004]. A titre d'exemple, la dernière référence utilise la méthode QRN (Quasi Random Number). Les méthodes d'échantillonnage sont couramment utilisées pour estimer les grandeurs statistiques liées à la réponse $f(\zeta(x))$.

II.2.4.2 Méthode de projection

Cette méthode consiste à projeter la réponse du modèle dans la base de chaos polynomial. La projection de l'équation correspondante dans $\Psi_j(x)$ est :

$$E[f\Psi_j] = E\left[\sum_{i=1}^P f_i \Psi_i \Psi_j\right] = \sum_{i=1}^P f_i E[\Psi_i \Psi_j] \quad (\text{II.63})$$

avec $E[\cdot] = \int_{\Omega^n} (\cdot) d\phi(x)$. A l'aide de l'utilisation de l'orthogonalité de chaos polynomial $E[\Psi_i \Psi_j] = 0$ pour $i \neq j$, on aura :

$$E[f \Psi_j] = f_j E[\Psi_j^2] \quad (\text{II.64})$$

Les coefficients de chaos polynomial f_j sont donnés par :

$$f_j = \frac{E[f(x) \Psi_j(x)]}{E[\Psi_j^2(x)]} \quad (\text{II.65})$$

L'intégration du numérateur est donnée par :

$$E[f(x) \Psi_j(x)] = \int_{\Omega^n} f(x) \Psi_j(x) d\phi(x) \quad (\text{II.66})$$

On utilise en général ici des méthodes de quadrature pour calculer les intégrales.

II.2.4.3 Méthode de régression

Dans cette méthode les coefficients recherchés sont calculés en se basant sur la minimisation des moindres carrés entre la réponse du modèle numérique et la décomposition du chaos polynomial. On suppose que :

$$Y = f(x) = \hat{f}(x) + \varepsilon \quad (\text{II.67})$$

Tel que $\hat{f}(x) = \sum_{j=0}^{P-1} f_j \Psi_j(x)$ et ε est l'erreur. On suppose aussi que $Y = \{y^i, i = 1, \dots, N\}$ est la réponse du modèle $f(x)$ de nombre d'échantillonnage N . On cherche à minimiser la variance de l'erreur ε . L'application de la minimisation par des moindres carrés conduit à résoudre l'équation suivante :

$$\phi = \arg \min \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left\{ f(x^i) - \sum_{j=0}^{P-1} f_j \Psi_j(x^i) \right\}^2 \quad (\text{II.68})$$

Nous nous rappelons que Ψ est définie par $\Psi = \{\Psi_{ij} = \Psi_j(x^i), i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, P\}$ et $f = \{f_0, \dots, f_P\}^T$, Dans ce cas, la solution est donnée par :

$$f = (\Psi^T \Psi)^{-1} \Psi^T Y \quad (\text{II.69})$$

Le terme $(\Psi^T \Psi)^{-1}$ représente la matrice de Fisher. Pareillement, une méthode dite de régression par les moindres angles LAR (least angle regression) peut être utilisée pour estimer les coefficients du chaos polynomial. Cette méthode est introduite pour la première fois dans le travail de [Efron 2004] et est utilisée dans [Blatman 2011], et par la suite améliorée par Nguyen [Nguyen 2016]. L'erreur de l'approximation est donnée par l'expression suivante :

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (Y_k - \hat{Y}_k)^2 \quad (\text{II.70})$$

II.2.5 Analyse de sensibilité

II.2.5.1 Contexte

La question importante dans le domaine de l'analyse d'incertitudes est la suivante : quels sont les paramètres (entrées) les plus influents sur la réponse (la sortie) d'un système ? La réponse à cette question permet de réduire l'incertitude de la réponse sur la base de la connaissance des paramètres d'influence. En effet, l'analyse de sensibilité permet de répondre à ces questions. Dans cette analyse, il est très utile d'utiliser un indicateur fiable et important, et il doit être global et facile à interpréter. Nous allons présenter quelques indices globaux de sensibilité. Nous nous concentrons sur l'indice qui se base sur la décomposition de la variance, cet indice est appelé "indices de Sobol".

II.2.5.2 Indices de Sobol

II.2.5.2.1 Indices de Sobol basés sur la variance

Dans ce qui suit, nous considérons que la réponse du modèle est de type scalaire présentée par une fonction $f(x)$ où les entrées scalaires $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ sont définies dans l'unité hypercube $\Omega_n = [0,1]^n$. Nous supposons que $f(x)$ est carré sommable ($f(x) \in L^2$) et que les entrées sont indépendantes. Adoptons les hypothèses suivantes ; la première hypothèse implique que la prédiction du modèle est de valeurs finies et la deuxième hypothèse suppose a priori que le jugement de l'expert exclut les corrélations possibles des entrées. Sous l'hypothèse de l'indépendance des variables, soit la transformation de Rosenblatt [Rosenblatt 1952] définie par :

$$\begin{aligned} x_1 &= F_1(x_1) \\ &\vdots \\ x_n &= F_n(x_n) \end{aligned} \tag{II.71}$$

Nous nous rappelons que l'espérance conditionnelle $E(Y|X_i)$ est une variable aléatoire, elle ne dépend que de X_i . Sa variance est alors réelle et quantifie la dispersion de Y pour une entrée X_i . Lorsque cette variance est élevée, cela signifie que X_i a une grande influence sur la réponse, et par conséquent la variation de Y due de la variation de X_i sera élevée. Par division de la variance de l'espérance conditionnelle sur la variance totale de Y nous obtenons les indices de Sobol [Sobol 1993, Saltelli 2006, Janon 2012] associés à X_i et définis par :

$$S_i = \frac{\text{Var}(E[Y|X_i])}{\text{Var}(Y)} \tag{II.72}$$

II.2.5.2.2 Décomposition de l'ANOVA

La condition $f(x) \in L^2$ implique que $f(x)$ peut toujours se décomposer en somme de fonctions de dimension croissante :

$$f(x) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{j>i}^n f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{1\dots n}(x_1, \dots, x_n) \quad (\text{II.73})$$

Cette décomposition est unique si nous imposons les conditions suivantes [Sobol 2001] :

$$\int_0^1 f_{i_1\dots i_s}(x) dx_k = 0, \quad \text{if } k \in \{i_1, \dots, i_s\} \quad (\text{II.74})$$

$$E(f_{i_1\dots i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s})) \times f_{j_1\dots j_r}(x_{j_1}, \dots, x_{j_r}) = 0 \quad \text{if } \{i_1, \dots, i_s\} \neq \{j_1, \dots, j_r\} \quad (\text{II.75})$$

Avec $E(.) = \int_{\Omega_n} (.) dx$ est l'espérance. Dans la décomposition d'ANOVA (*Analysis Of Variance*), il est facile de démontrer la relation suivante :

$$\begin{aligned} V = \text{Var}(f(x)) &= E \left[E[f^2(x)] - f_0^2 \right] \\ &= \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{j>i}^n V_{ij} + \dots + V_{1\dots n} \end{aligned} \quad (\text{II.76})$$

Avec $f_0 = E[f(x)]$. Var est l'opérateur de la variance, V est la variance globale et $V_{i_1\dots i_s} = \text{Var}(f_{i_1\dots i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}))$ est la variance partielle. En effet, il s'agit en particulier de déterminer l'indice $S_i = \frac{V_i}{V}$ indice de sensibilité du premier ordre qui mesure la partie de la variance. Si $S_i = 0$ cela ne signifie pas que S_i n'a pas d'influence, il se peut qu'elle ait une influence par interaction avec d'autres paramètres, et ceci est présenté dans [Homma 1996]. Les indices de sensibilité totaux sont :

$$S_{i_1\dots i_s} = \frac{\sum_{i \in \{i_1, \dots, i_s\}} V_{i_1\dots i_s}}{V} \quad (\text{II.77})$$

Ce dernier indice mesure la contribution de x_i , et il informe également sur l'influence de x_i sur les autres variables.

II.2.5.2.3 Indices de Sobol et le chaos polynomial

Considérons le modèle scalaire qui contient M paramètres d'entrée réunis dans un vecteur d'entrée \mathbf{x} , et une sortie scalaire y :

$$y = M(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in [0,1]^M \quad (\text{II.78})$$

Les paramètres d'entrée sont définis sur le cube d'unité de M -dimensions $[0,1]^M$. La décomposition de Sobol de $M(\mathbf{x})$ en sommes de dimension croissante [Sobol 1993] s'écrit :

$$M(\mathbf{x}) = M_0 + \sum_{i=1}^M M_i(x_i) + \sum_{1 \leq i < j \leq M} M_{ij}(x_i, x_j) + \dots + M_{12\dots M}(x) \quad (\text{II.79})$$

avec M_0 est un constant, imposé de telle sorte que l'intégrale de chaque sommation $M_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s})$ égale à zéro :

$$\int_0^1 M_{i_1, \dots, i_s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) dx_{i_k} = 0, \quad 1 \leq k \leq s \quad (\text{II.80})$$

Les propriétés de cette décomposition $M(\mathbf{x})$ sont les suivantes [Homma 1996] :

- La somme suivante

$$\sum_{i=1}^M \binom{M}{i} = 2^M - 1 \quad (\text{II.81})$$

- Le constant M_0 est la valeur moyenne de la fonction :

$$M_0 = \int_{[0,1]^M} M(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{II.82})$$

- Les sommations sont orthogonales, soit :

$$\int_{[0,1]^M} M_{i_1, \dots, i_s} (x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) M_{j_1, \dots, j_s} (x_{j_1}, \dots, x_{j_s}) dx = 0, \quad \{i_1, \dots, i_s\} \neq \{j_1, \dots, j_s\} \quad (\text{II.83})$$

Notons que la décomposition est unique, donc $M(x)$ est intégrable sur $[0,1]^M$. Sachant que les termes invariants sont :

$$M_i(x_i) = \int_{[0,1]^{M-1}} M(x) dx_{\sim i} - M_0 \quad (\text{II.84})$$

Et les termes bivariants sont donnés par :

$$M_{ij}(x_i, x_j) = \int_{[0,1]^{M-2}} M(x) dx_{\sim \{ij\}} - M_i(x_i) - M_j(x_j) - M_0 \quad (\text{II.85})$$

Pour la relation entre l'expression du chaos polynomial et les indices de Sobol, définissons le multi-indices I_{i_1, \dots, i_s}

$$I_{i_1, \dots, i_s} = \left\{ \alpha : \begin{array}{ll} \alpha_k > 0 & \forall k = 1, \dots, M \quad k \in (i_1, \dots, i_s) \\ \alpha_k = 0 & \forall k = 1, \dots, M \quad k \notin (i_1, \dots, i_s) \end{array} \right\} \quad (\text{II.86})$$

Notons que I_i correspond aux polynômes dépendant uniquement du paramètre x_i . Utilisant cette notation, on aura :

$$\begin{aligned} \hat{M}_p(x) = & f_0 + \sum_{i=1}^M \sum_{\alpha \in I_{i_1}} f_\alpha \Psi_\alpha(X_i) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq M} \sum_{\alpha \in I_{i_1, i_2}} f_\alpha \Psi_\alpha(X_{i_1}, X_{i_2}) + \dots + \\ & \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_s \leq M} \sum_{\alpha \in I_{i_1, \dots, i_s}} f_\alpha \Psi_\alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) + \dots + \sum_{\alpha \in I_{1, \dots, M}} f_\alpha \Psi_\alpha(X) \end{aligned} \quad (\text{II.87})$$

Dans cette équation, chaque terme de la forme $\sum_{\alpha \in I_{i_1, \dots, i_s}} f_\alpha \Psi_\alpha(X_{i_1}, \dots, X_{i_s})$ est une fonction polynomiale dépendante sur tous les paramètres d'entrée (i_1, \dots, i_s) .

Aussi, les sommations dans la décomposition de Sobol $\hat{M}(x)$ peuvent s'écrire comme suit :

$$M_{i_1, \dots, i_s}(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) = \sum_{\alpha \in I_{i_1, \dots, i_s}} f_{\alpha} \Psi_{\alpha}(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) \quad (\text{II.88})$$

Les indices de Sobol de chaos polynomial sont désignés par S_{i_1, \dots, i_s}^{PC} tel que :

$$S_{i_1, \dots, i_s}^{PC} = \frac{1}{\sigma_{Y_p}^2} \sum_{\alpha \in I_{i_1, \dots, i_s}} f_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha \in I_{i_1, \dots, i_s}} f_{\alpha}^2 / \sum_{0 \leq |\alpha| \leq p} f_{\alpha}^2 \quad (\text{II.89})$$

Une fois les coefficients de chaos polynomial sont calculés, ils sont simplement réunis selon la dépendance de chaque base polynomiale, carré sommables et normalisés. Les indices totaux de sensibilité de chaos polynomial sont aussi simples à calculer :

$$S_{i_1, \dots, i_s}^T = \sum_{(i_1, \dots, i_s) \subseteq (j_1, \dots, j_t)} S_{i_1, \dots, i_s}^{PC} \quad (\text{II.90})$$

II.2.6 Exemple d'application

Dans cette application, nous présentons une grandeur aléatoire approchée par un chaos polynomial en utilisant le polynôme de Legendre. Cette application concerne un circuit électrique simple illustré par trois résistances en série dont deux résistances sont de valeur aléatoire $R_1(\zeta)$ et $R_2(\zeta)$. Ces deux résistances sont indépendantes et variables dans l'intervalle $[5; 7]$. La troisième résistance est fixe de valeur $R_3 = 9(\Omega)$. Les trois résistances en série sont parcourues par un courant aléatoire $I(\zeta)$ (Fig.II.6).

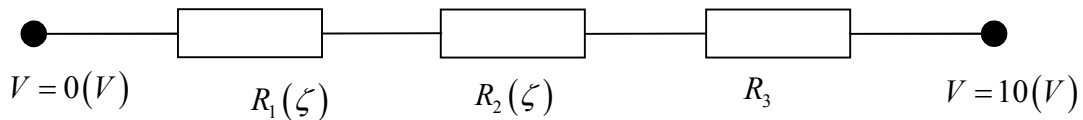


Fig.II.6 Schéma de l'exemple d'application.

L'expression du courant est obtenue en appliquant la loi d'Ohm :

$$I(\zeta) = \frac{V}{R_1(\zeta) + R_2(\zeta) + R_3} \quad (\text{II.91})$$

Appliquons la méthode de Monte Carlo avec un nombre d'échantillonnage $N_{MC} = 10000$ sur les deux résistances. L'estimation de la fonction de densité de probabilité (PDF) est réalisée en utilisant la méthode de noyau sur le courant électrique $I(\zeta)$ (Fig.II.7), cela pour différents ordre de polynômes ($p = 1, 2$ et $p = 3$).

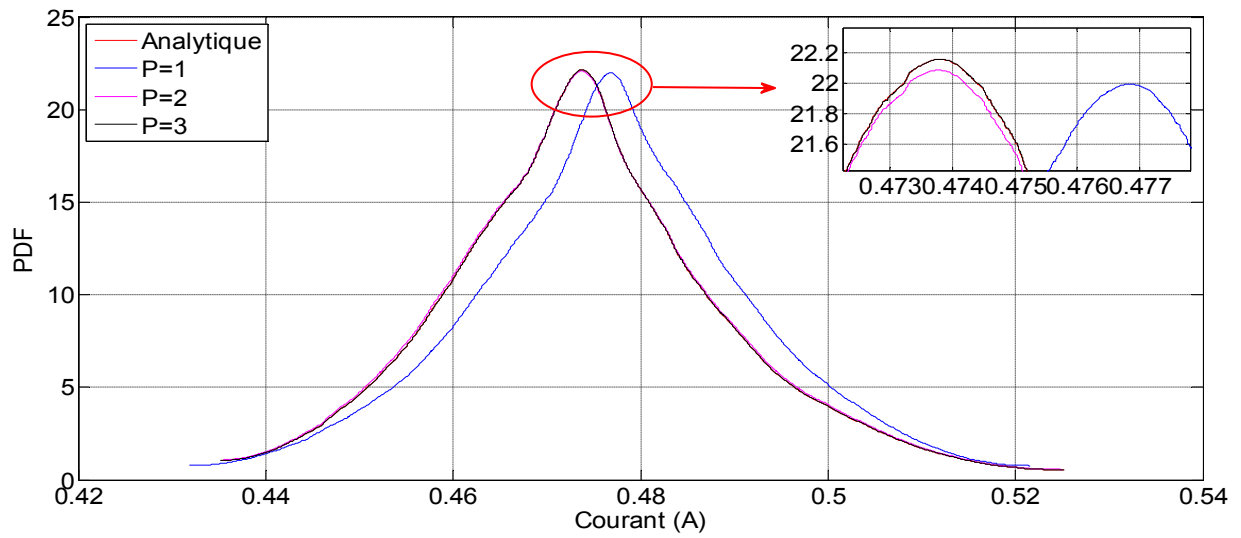


Fig.II.7 PDF du courant électrique.

Le courant électrique aléatoire (II.66) est approché par un chaos polynomial de Legendre, soit

$$I(\zeta) \approx I_{CP}(\zeta) = \sum_{\alpha=1}^{P+1} f_{\alpha} \Psi_{\alpha}(\zeta) \quad (\text{II.92})$$

avec $\Psi_{\alpha}(\zeta)$ est le polynôme de Legendre. Dans cette équation $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$ et f_{α} sont des coefficients à déterminer par la méthode de régression. Le degré de polynôme de Legendre est varié de $p = 1$ à $p = 3$ afin d'estimer la densité de probabilité (Fig.II.7). Pour un polynôme d'ordre $p = 1$ nous avons utilisé la régression classique pour estimer ses coefficients. Mais pour $p > 1$ nous avons utilisé la régression 'LAR'. L'erreur entre les deux courants peut-être calculée par la moyenne des moindres carrés, telle que :

$$\varepsilon = \mathbb{E} \left[\left(I - I_{CP} \right)^2 \right] \quad (\text{II.93})$$

Les valeurs de cette erreur sont montrées dans le Tableau.II.2 pour différentes valeurs de P . Notons que le meilleur résultat est obtenu pour $p = 3$.

Tableau.II.2 Variation d'erreur en fonction de degré de polynôme

Degré de polynôme (P)	Erreur (ε)
P=1	7.3269e-07
P=2	1.5911e-09
P=3	3.5671e-12

II.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les équations Maxwell ainsi que les formulations issues de ces équations à savoir la formulation magnétodynamique en termes de potentiel vecteur magnétique. La méthode de volumes finis a été utilisée comme méthode de discrétisation pour la résolution de la formulation considérée. La méthode non intrusive à base de polynômes de chaos de Legendre a été introduite afin d'approximer la quantité d'intérêt. Egalement, ce chapitre rapporte l'analyse de sensibilité qui est pour objectif de quantifier l'influence des paramètres d'entrée sur la réponse du système étudié.

Chapitre III

Estimation de la Probabilité de Détection d'un Problème de CND-CF

Ce chapitre concerne l'estimation de la probabilité de détection POD d'un problème de contrôle non destructif par courants de Foucault CND-CF. Le problème choisi comprend un tube métallique contenant un défaut circonférentiel et un capteur de type absolu. La modélisation du problème direct est effectuée à l'aide de la méthode des volumes finis MVF. Pour la prise en compte de la variabilité du domaine géométrique, nous avons considéré deux techniques ; le remaillage (RM) et la transformation géométrique (GT). Dans ce chapitre, l'approximation de la réponse stochastique représentée par l'impédance du capteur est obtenue en utilisant le 'metamodel'.

III.1 Description du problème d'étude

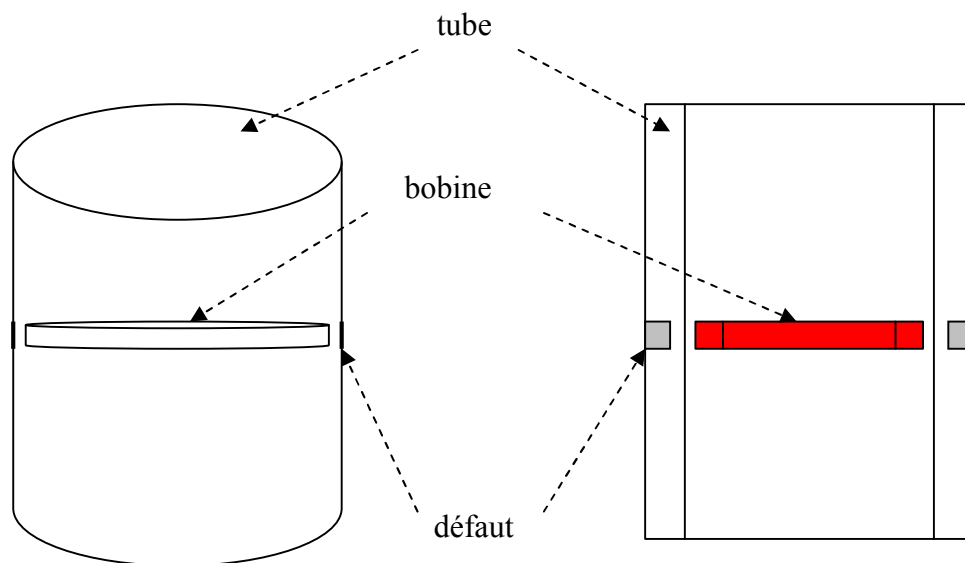


Fig.III.1 Description du problème de CND-CF.

Dans le domaine industriel, l'intégrité des composants et la continuité du service sont amplement demandées. Alors, pour assurer et quantifier cette intégrité et continuité les techniques de contrôle non destructif sont sollicitées (magnétoscopie, ultrasons,

CND-CF,...etc.). Pour les pièces fabriquées à base des matériaux conducteurs, le CND-CF est la technique la plus adaptée. La technique de CND-CF implique l'utilisation d'un capteur inductif excité par un courant alternatif ayant une fréquence donnée. La variation de l'impédance du capteur informe sur l'état de la pièce inspectée. En effet, cette variation d'impédance dépend des propriétés physiques de la pièce (sa perméabilité magnétique et sa conductivité électrique) et également de sa géométrie. La Fig.III.1 montre un problème de CND-CF, constitué principalement d'un tube conducteur qui représente la pièce à inspecter [Song 2000]. Le capteur inductif utilisé est un capteur absolu c.-à-d. une seule bobine chargée des deux fonctions : émission et réception du champ magnétique. Le défaut introduit est de forme circonferentielle, donc la modélisation de tel problème peut être menée en axisymétrie (Fig.III.2).

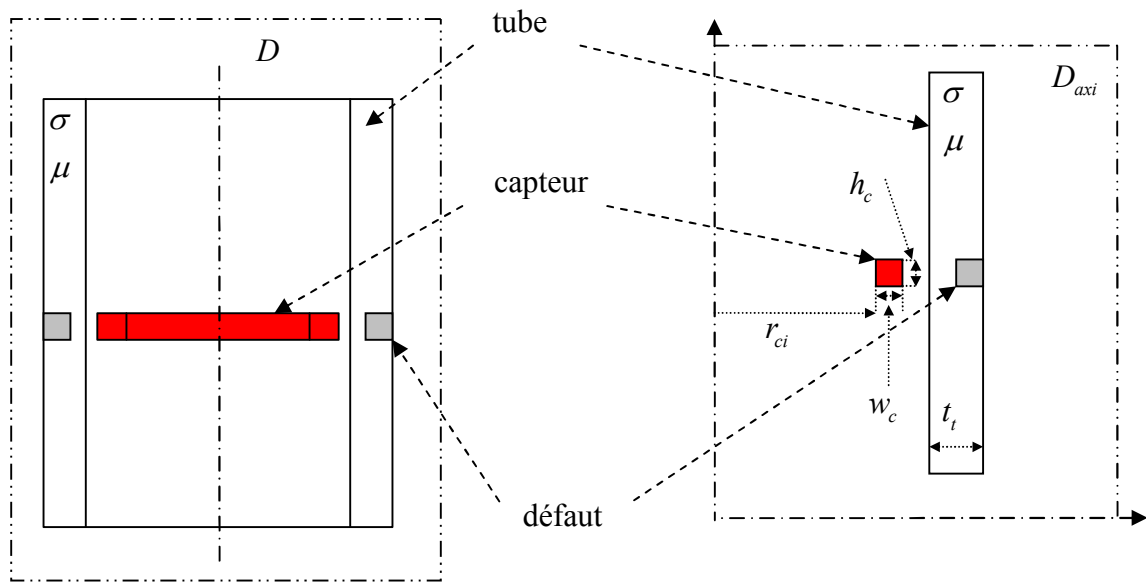


Fig.III.2 Représentation axisymétrique du problème.

Dans ce cas, le domaine d'étude est ramené à D_{axi} . Avec r_{ci} , w_c et h_c sont les dimensions de la bobine ; le rayon intérieur, la largeur et la longueur, respectivement. t_l est l'épaisseur du tube (Tableau.III.1). Dans cette application, la quantité d'intérêt à calculer est l'impédance électrique du capteur absolu.

Tableau.III.1 Dimensions du tube, capteur et de défaut.

Tube	Rayon intérieur	8.235
	Epaisseur	1.29
	Rayon extérieur	9.525
Capteur	Rayon intérieur	6.225
	Largeur	1.5
	Rayon extérieur	7.725
	Longueur	1.5
Défaut	Largeur	1.5

III.2 Approche stochastique de la géométrie du problème

Rappelons que les propriétés physiques et géométriques du problème ci-dessus ne sont pas connues d'une façon complète et exacte. Par ceci, l'impédance électrique du capteur peut être influencée par certaines variabilités. Alors, le problème d'étude doit être remplacé par un autre problème équivalent aléatoire dans lequel tous les paramètres sont 'incertains' (approche stochastique). La variation des paramètres incertains du problème stochastique peut être modélisée par des lois probabilistes (loi normale, uniforme,...etc.). La Fig.III.3 représente le nouveau domaine d'étude procédé par cette approche stochastique. Dans cette figure, $D_{axi}(\Theta)$ est le domaine stochastique. $r_{ci}(\Theta)$, $w_c(\Theta)$ et $h_c(\Theta)$ sont les nouvelles dimensions aléatoires de la bobine ; rayon intérieur, largeur et longueur, respectivement. $t_t(\Theta)$ est l'épaisseur incertain du tube. $\mu(\Theta)$ et $\sigma(\Theta)$ Sont la perméabilité magnétique et la conductivité électrique aléatoires. Et Θ est un vecteur aléatoire indépendant et uniforme ($\Theta \in [0, 1]^{N_\Theta}$) avec N_Θ est le nombre des paramètres d'entrée. Les dimensions des paramètres d'entrée incertains sont représentées par une loi probabilité uniforme ' \mathcal{V} ' (Tableau.III.2) et chaque paramètre d'entrée dépend qu'une seule composante de Θ . Pour chaque paramètre est associé un pourcentage qui représente les limites minimale et maximale par rapport à sa valeur nominale.

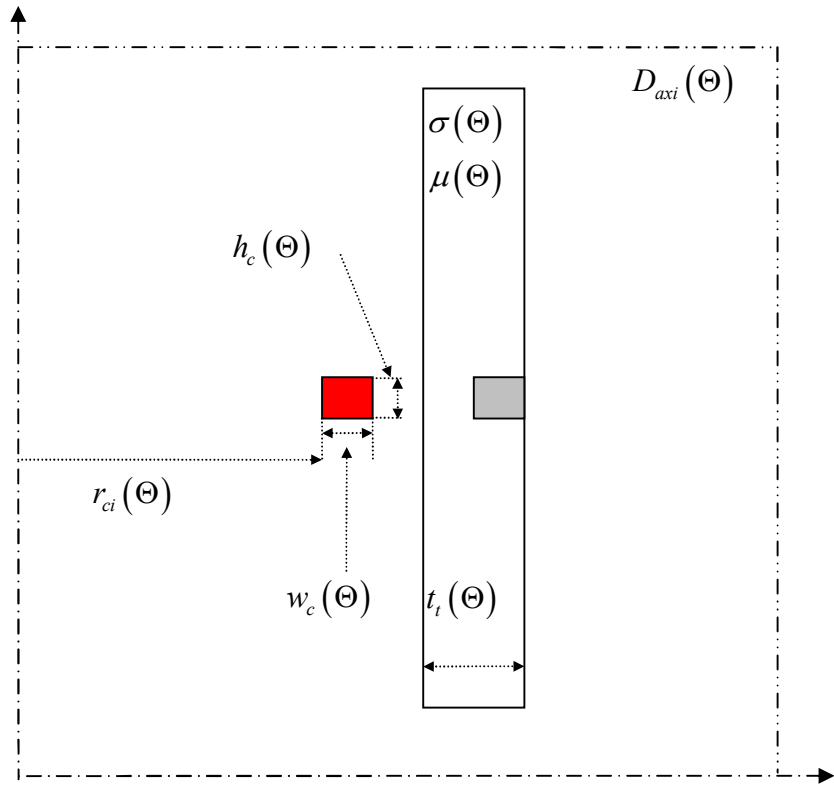


Fig.III.3 Problème stochastique équivalent.

Tableau.III.2 Paramètres aléatoires du système stochastique.

Variable aléatoire	Loi probabiliste	Pourcentage de variation		
μ	$\sim \mathcal{U}$	+10%	+2%	0%
σ	$\sim \mathcal{U}$	$\pm 10\%$	$\pm 2\%$	$\pm 1\%$
r_{ci}	$\sim \mathcal{U}$	$\pm 5\%$	$\pm 2\%$	0%
w_c	$\sim \mathcal{U}$	$\pm 5\%$	$\pm 2\%$	$\pm 1\%$
h_c	$\sim \mathcal{U}$	$\pm 5\%$	$\pm 2\%$	$\pm 1\%$
t_t	$\sim \mathcal{U}$	$\pm 5\%$	$\pm 2\%$	0%

Dans la Fig.III.4, on illustre la variabilité des paramètres d'entrée à l'aide d'un histogramme.

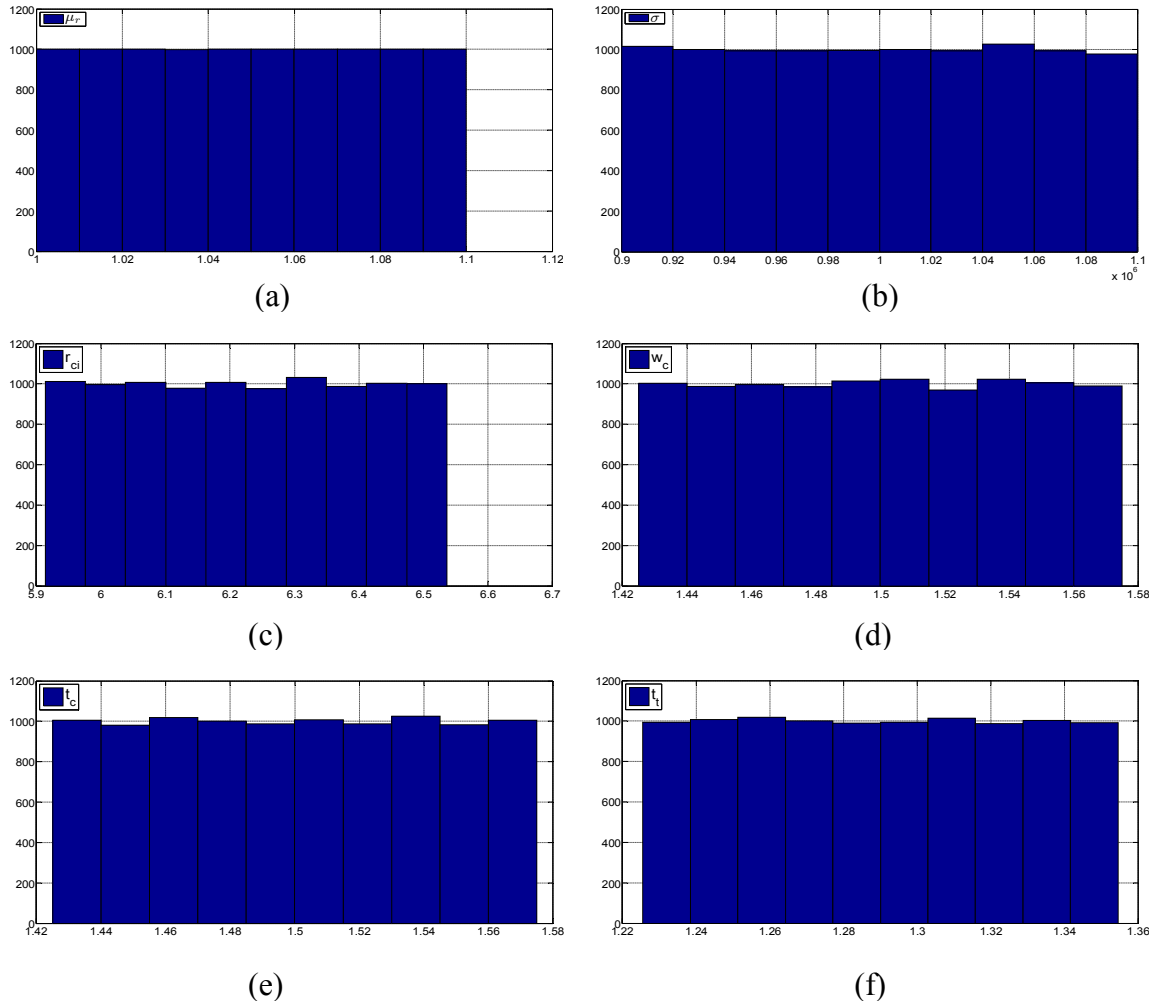


Fig.III.4 Histogrammes des paramètres d'entrée (matlab).

(a) perméabilité magnétique du tube, (b) conductivité électrique du tube, (c) rayon intérieur de la bobine, (d) largeur de la bobine, (e) longueur de la bobine, (f) épaisseur du tube.

III.3 Résolution du problème par une approche déterministe

Pour la résolution du problème énoncé précédemment, nous avons utilisé la formulation magnétodynamique formulée en termes de potentiel vecteur magnétique. La discrétisation de cette équation EDP est effectuée par la méthode des volumes finis dont le nombre total des volumes élémentaires est $N_s = 14504$ (taille du maillage). Comme dans tous les problèmes de CND-CF, l'impédance du capteur inductif est calculée dans les deux cas ; sans et avec défaut.

Le capteur de nombre de spires 250 est excité par un courant sinusoïdal de 9mA d'une fréquence de $f = 100kHz$. A titre d'illustration, la Fig.III.5 représente l'évolution de l'impédance électrique du capteur dans le cas 'avec défaut'. Notons par 'z' l'impédance déterministe du capteur, c-à-d, on fixe les paramètres d'entrée. Cette impédance est en fonction de la profondeur du défaut 'a' (crack depth) [Browne 2017].

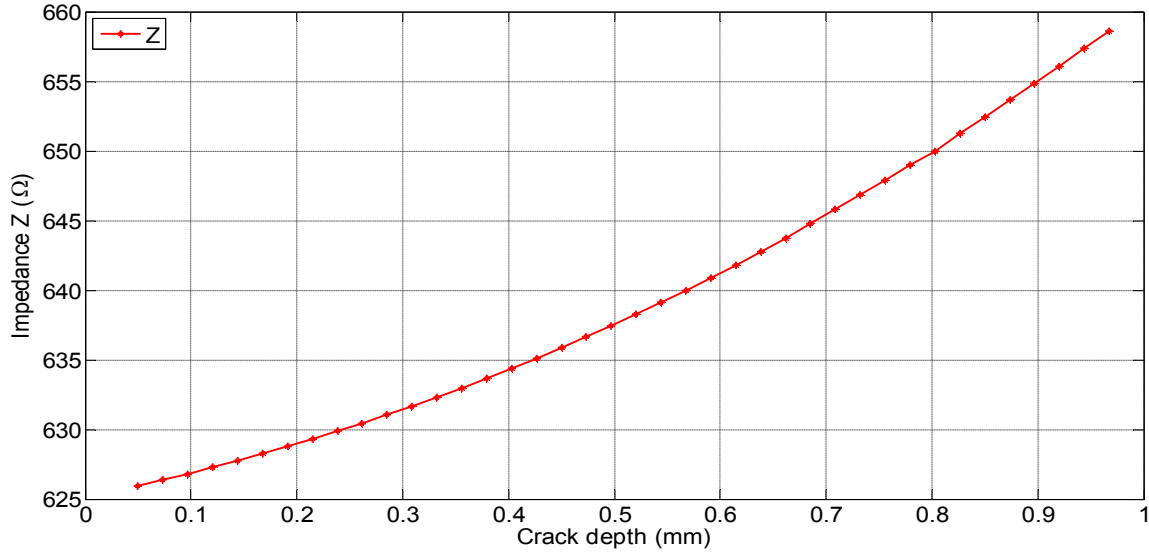


Fig.III.5 Impédance du capteur en fonction de la profondeur du défaut 'a'.

Définissons un indice 's' qui représente le seuil pour lequel on peut distinguer entre les défauts détectables et non détectables. Alors, les défauts présentant une impédance supérieure à 's' sont des défauts détectables et dans le cas contraire sont non détectables. Attribuons, pour chaque type de défaut une probabilité ; soit la probabilité de $P=1$ pour les défauts détectables et la probabilité $P=0$ pour les défauts non détectables. Traçons maintenant, une courbe dite 'courbe de détection' (dite aussi courbe de la POD) notée par $POD(a)$ Cette courbe est de forme d'échelon a deux valeurs (0 ou 1) séparées par le seuil (Fig.III.6), et cette courbe-la est la courbe théorique que l'on cherche à atteindre. En effet, le seuil 's' doit être choisi par le constructeur de la pièce en question, il distingue entre l'état grave et l'état sur de la pièce. Soit :

$$z(a > a_s) \Leftrightarrow z(a) > z_s \text{ pour les défauts détectables.}$$

$$z(a < a_s) \Leftrightarrow z(a) < z_s \text{ pour les défauts non détectables.}$$

Avec a_s et z_s sont le seuil de la profondeur du défaut et le seuil de l'impédance correspondante du capteur, respectivement.

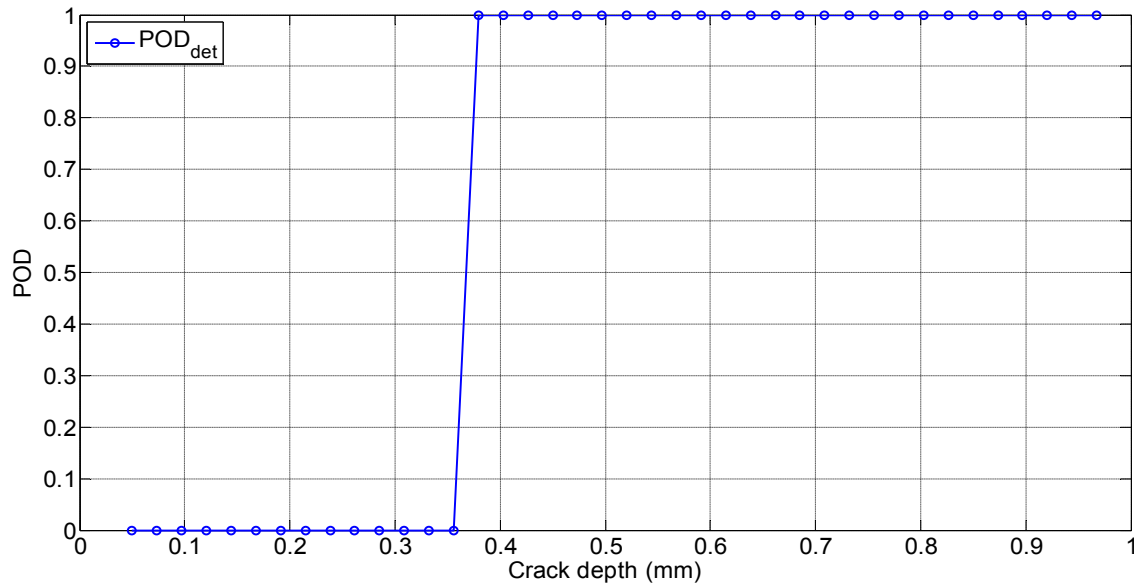


Fig.III.6 Courbe de la probabilité détection des défauts $POD(a)$.

III.4 Résolution du problème par une approche stochastique

Cette approche est basée principalement sur la variation aléatoire des entrées à savoir les propriétés physiques et géométriques du problème. Ainsi, le développement de cette approche nécessite l'utilisation d'une technique de prise en compte de la variabilité de la géométrie. Pour ce faire, nous avons considéré deux techniques :

- Le remaillage (RM).
- La transformation géométrique.

III.4.1. Approche stochastique par remaillage

Dans cette approche, les paramètres physiques à savoir la perméabilité magnétique et la conductivité électrique du tube ainsi que les différentes dimensions du problème sont introduites avec incertitudes c.-à-d. ne sont pas déterministes. Et malheureusement, ces paramètres ne peuvent pas être exploités directement dans le modèle numérique développé. Les incertitudes de ces paramètres sont définies par des lois probabilistes. Dans ce cas, l'impédance du capteur (réponse du système) n'est plus déterministe, et elle est représentée

par une variable aléatoire noté (Z). Cette impédance doit être quantifiée afin d'estimer une probabilité de détection POD en fonction de la profondeur de défaut. Pour ce faire, considérons les quatre étapes suivantes :

Etape 1 : Résolution du système

Soit le un vecteur aléatoire Θ représentant les paramètres d'entrée, et M le nombre de réalisations. En effet, la simulation numérique doit être répétée M fois pour les différentes valeurs de Θ . Donc, le maillage du domaine géométrique ainsi que la résolution du système doivent être aussi répétés Θ fois. Dans la Fig.III.7, on représente la démarche suivie pour la résolution du modèle stochastique.

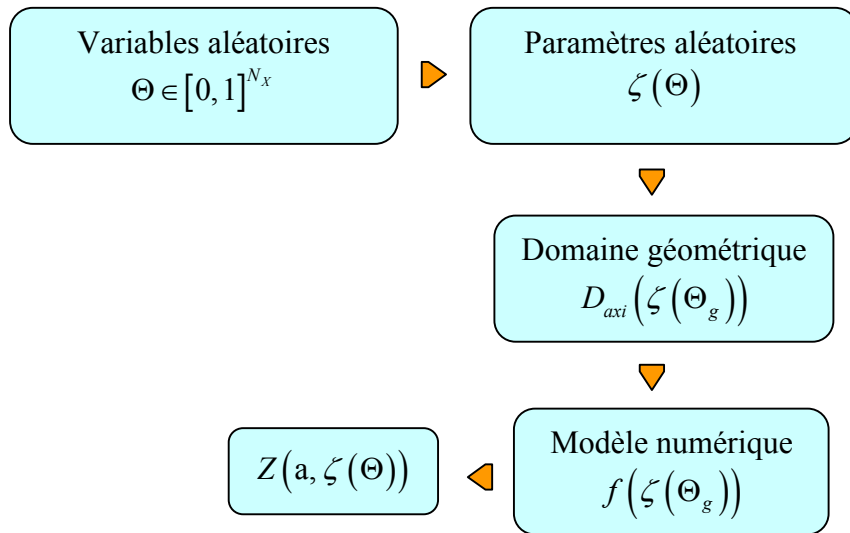


Fig.III.7 Algorithme du modèle numérique stochastique.

L'impédance stochastique du capteur $Z(a, \zeta(\Theta))$ doit être calculée pour chaque réalisation. En effet, cette impédance est en fonction de la profondeur du défaut 'a' et le vecteur d'entrée Θ aléatoire. Donc, l'ensemble $(a, \zeta(\Theta))$ affecte la réponse stochastique du système de CNDCF, cette réponse est représentée $Z(a, \zeta(\Theta))$. La Fig.III.8 représente la variation de la densité de probabilité PDF de l'impédance stochastique dans les deux cas : avec défaut (Z_d) et sans défaut (Z_0).

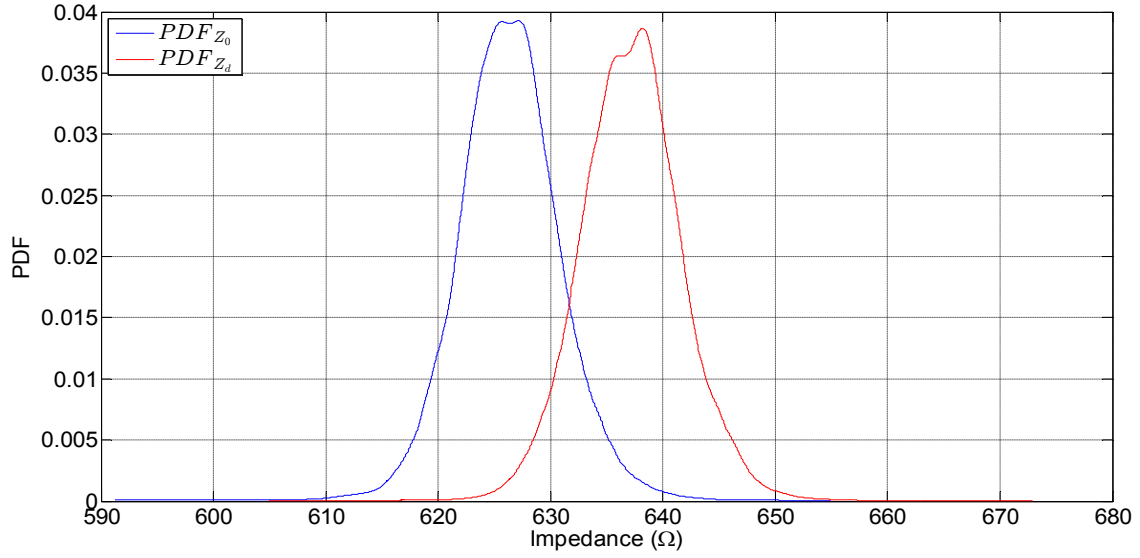


Fig.III.8 PDF de l'impédance stochastique du capteur : avec et sans défaut.

Etape 2 : Construction du metamodel

Le modèle numérique stochastique ayant comme réponse l'impédance stochastique du capteur $Z(\zeta(\Theta))$, peut être remplacé par un autre modèle mathématique dit 'metamodel'. Il s'agit d'utiliser un polynôme basé sur les polynômes de chaos de Legendre construit par un nombre d'échantillons très réduit (M_r) c-a-d $M_r < M$. Soit :

$$Z = f(a, \Theta) \approx \hat{Z} = f_{LAR}(a, \Theta) \quad \text{III.1}$$

Avec f_{LAR} désigne le metamodel, et \hat{Z} est l'impédance stochastique approchée du capteur.

L'expression de \hat{Z} du metamodel s'écrit :

$$Z(\zeta(\Theta)) \approx \hat{Z}(\zeta(\Theta)) = \sum_{j=1}^{P_{out}} \alpha_j \Psi_j(\zeta(\Theta)) \quad \text{III.2}$$

L'approximation de \hat{Z} est faite pour différents degrés de polynôme de Legendre ($p = 1:4$).

Pour $p = 1$, le polynôme est linéaire et est approché par une régression de moindres carrés.

Dans le cas $p > 1$, avec un nombre de paramètres d'entrée élevé, on se trouve face à un fléau

de la dimension. Par exemple pour $p = 4$ et $N_p = 6$ on a $P_{out} = 720$. Le nombre des termes de polynômes de Legendre augmente exponentiellement et devient plus élevé. Pour réduire ce nombre, nous avons utilisé la méthode de régression dite par les moindres angles LAR (Least Angle Regression). Cette méthode a été proposée par [Efron 2004] comme une méthode rapide basée sur la sélection des polynômes les plus influents sur l'approximation de la réponse. Ensuite, elle est considérablement améliorée dans les travaux de [Blatman 2011, Nguyen 2016]. Pour un nombre de paramètres d'entrée $N_p = 6$, l'approximation de l'impédance à l'aide d'un metamodel de premier ordre ($p = 1$) est de la forme :

$$\hat{Z} = 625.15 + 1.94\Psi_1(\zeta_1(\Theta_1)) - 6.16\Psi_2(\zeta_2(\Theta_2)) - 1\Psi_3(\zeta_3(\Theta_3)) - 5.39\Psi_4(\zeta_4(\Theta_4)) - 4.11\Psi_5(\zeta_5(\Theta_5)) - 1.34\Psi_6(\zeta_6(\Theta_6)) \quad (\Omega) \quad \text{III.3}$$

La génération de l'échantillon se fait par Monte Carlo puis les coefficients sont déterminés par LARS. Les résultats sont montrés dans le Tableau.III.3, la valeur moyenne et l'écart type de l'impédance stochastique approchée (\hat{Z}_{RM}) sont calculées pour différents degré du polynôme dans le cas 'sans défaut'. Le nombre d'échantillons utilisé pour la construction du metamodel est $M_r = 150$. Ici, la technique de remaillage a été utilisée pour la prise en compte de la variabilité du modèle géométrique du problème.

Tableau.III.3 Moyenne et écart type de \hat{Z}_{RM}

Degré de polynôme	$\hat{Z}_{RM}(\Omega)$	
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
$p = 1$	625	9.5
$p = 2$	625	9.5
$p = 3$	625	9.5
$p = 4$	625	9.5
$p = 5$	625	9.5

D'après le Tableau.III.3, on remarque que pour cette application un polynôme linéaire d'ordre 1 suffit pour approximer l'impédance stochastique. Dans la Fig.9, on représente l'erreur de l'impédance ; différence entre l'impédance stochastique calculée par simulation et celle approchée par le metamodel.

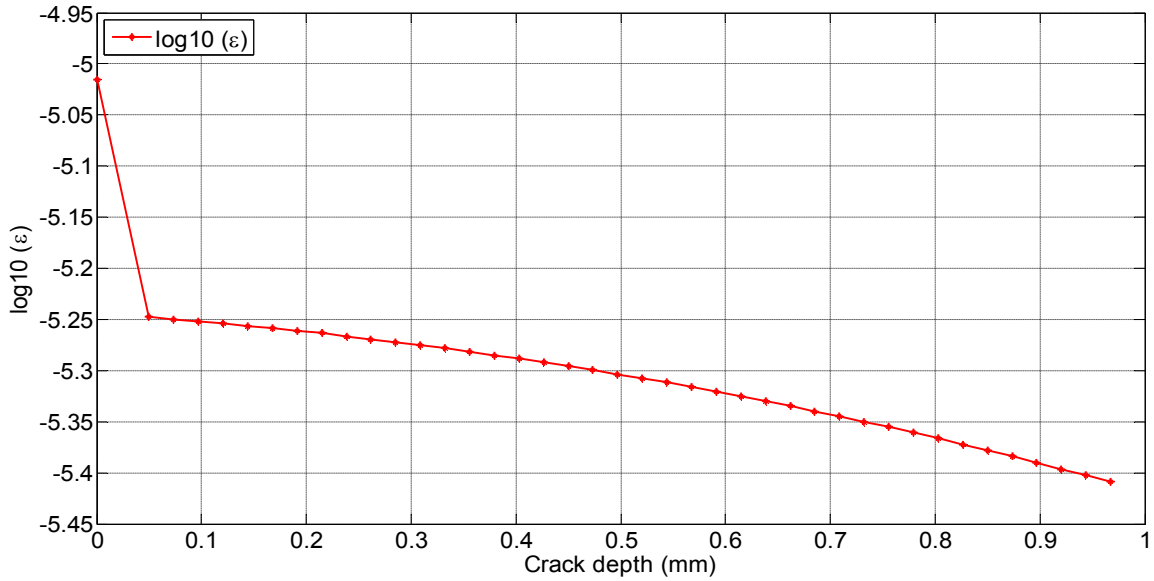


Fig.III.9 Erreur de l'impédance.

Etape 3 : Estimation de la probabilité de détection POD

L'estimation de la PDO permet de quantifier l'influence du défaut dans un système de CND-CF. Afin de distinguer entre les défauts détectés et les défauts non détectés, un seuil 's' doit être établi. Ce seuil est déterminé en imposant une probabilité dite de fausse alarme (PFA) de valeur constante, par exemple de 5%. L'expression de la PFA est donnée par :

$$PFA = \int_s^{\infty} p(Z | a_{sd}) dZ = 0.05 \quad \text{III.4}$$

avec a_{sd} représente l'état du système de CND-CF dans le cas 'sans défaut'. Cette dernière équation permet de déterminer le seuil recherché 's' pour lequel la PFA est égale à 5%. Après la détermination du seuil, la POD est estimée comme suit :

$$POD = \int_s^\infty p(Z(\Theta) | a_{ad}) dZ \approx \hat{POD} = \int_{\hat{s}}^\infty p(\hat{Z}(\Theta) | a_{ad}) d\hat{Z} \quad \text{III.5}$$

Dans cette équation, a_{ad} représente l'état du système de CND-CF dans le cas 'avec défaut'. En effet, la POD est estimée pour les différentes profondeurs du défaut a_i ($i = 1:d$), avec d est le nombre des défauts réalisés. L'équation de la POD peut être réécrite comme suit:

$$POD(a) = \int_s^\infty p(Z\Theta | a_{ad}) dZ \approx \hat{POD}(a) = \int_{\hat{s}}^\infty p(\hat{Z}(\Theta) | a_{ad}) d\hat{Z} \quad \text{III.6}$$

POD_{RM} . La Fig.III.10 représente la POD estimée par la technique de remaillage (RM). Un intervalle de confiance de la POD sera calculé par la suite en se basant sur la méthode de Wilson [NIST/SEMATECH].

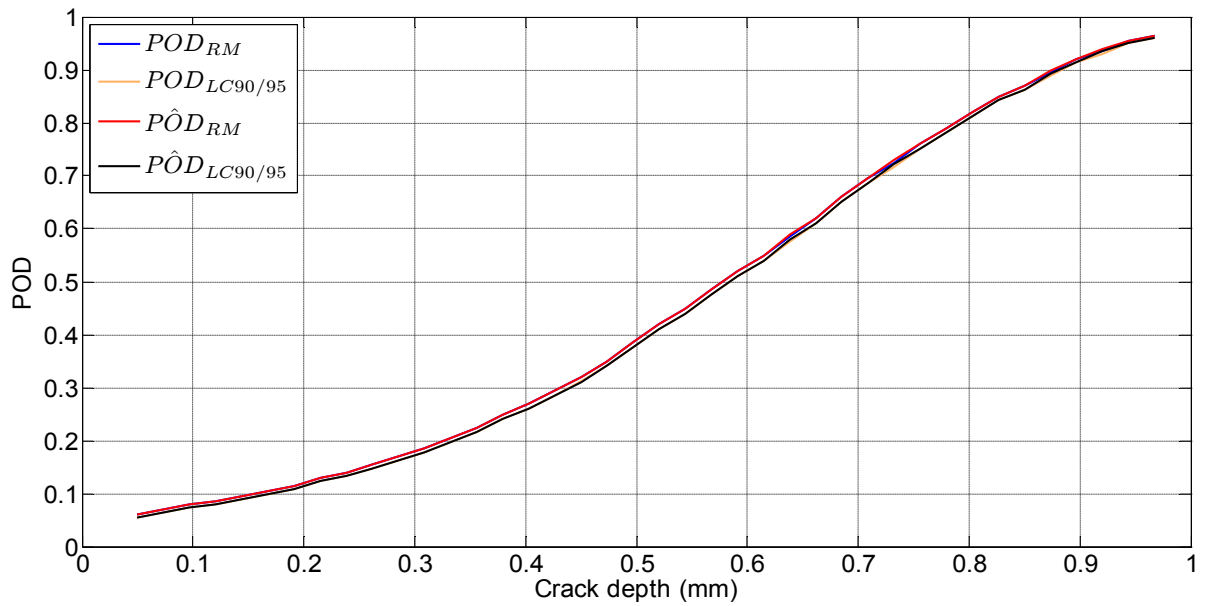


Fig.III.10 POD estimée par RM et comparée avec celle du metamodel.

De la Fig.III.10, on remarque que la profondeur du défaut pour laquelle la POD est égale à 90%, est de l'ordre de $a_{90} = 0.8781, 0.8734$ (mm) pour les deux méthodes RM et metamodel, respectivement. Dans cette figure, $POD_{LC90/95}$ et $\hat{POD}_{LC90/95}$ sont les intervalles de confiance de la POD pour les deux méthodes RM et metamodel, respectivement.

Etape 4 : Analyse de sensibilité

L'analyse de la sensibilité a pour objectif la quantification de l'influence de chaque paramètre d'entrée sur la réponse du système c.-à-d. sur l'impédance du capteur. Les figures Fig.III.11 et Fig.III.12 montrent les indices de sensibilité de premier ordre et celui total ($S_i, T_i, i = 1, \dots, N_p$). D'après ce résultat, pour une profondeur défaut $a = 0.4735$, on remarque que le paramètre d'entré le plus influençable sur la réponse du système est celui la conductivité électrique du tube (σ), ensuite le deuxième paramètre influençable est la largeur de la bobine (w_c) suivie par sa hauteur (t_c). Ces trois paramètres ont l'impact principal sur la dispersion de la réponse traduite par la variation de l'écart-type.

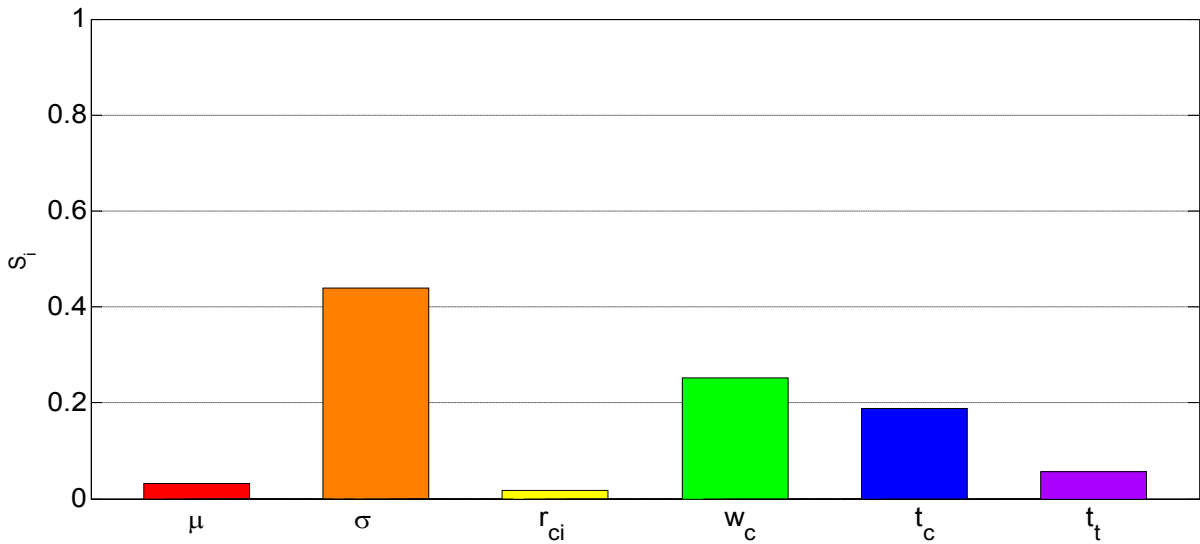


Fig.III.11 Indice de sensibilité du premier ordre pour un défaut de profondeur $a = 0.4735$.

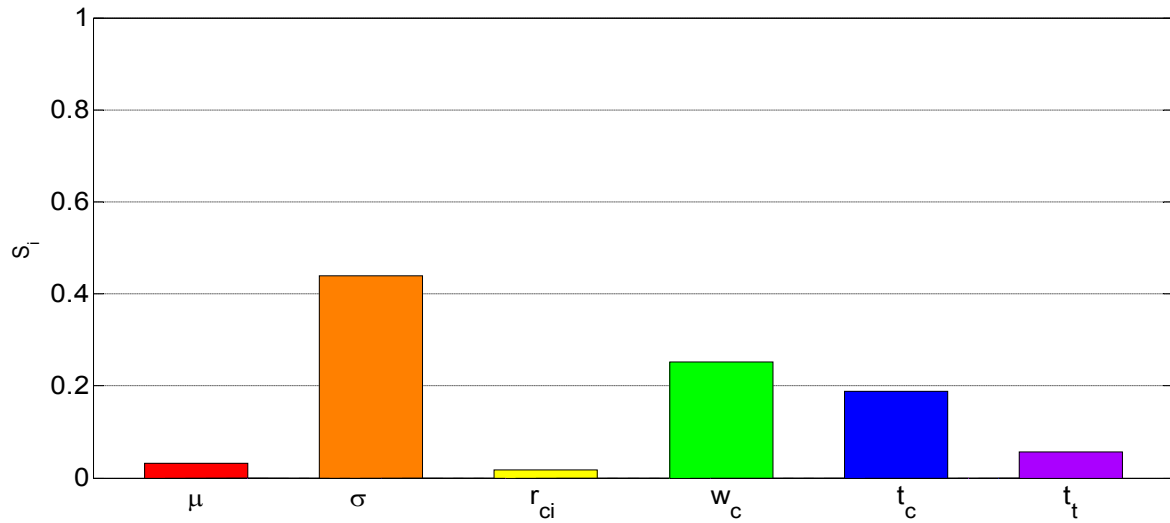


Fig.III.12 Indice de sensibilité total pour $a = 0.4735$.

Les figures Fig.III.13 et Fig.III.14 représentent les indices de sensibilité de premier ordre et total pour tous les défauts. Ces caractéristiques varient en fonction de l'influence des paramètres d'entrées. D'après ces résultats, nous constatons que les deux indices sont très proches (presque identiques), alors l'interaction entre eux est très faible. Nous constatons également que l'impact principal revient à la conductivité électrique du tube (σ), ensuite les dimensions de la bobine (sa largeur w_c et l'hauteur t_c). Cependant, une petite influence de la perméabilité magnétique du tube sur la réponse est remarquée. Nous constatons aussi, l'augmentation de l'influence du rayon intérieur de la bobine (r_{ci}) et l'épaisseur du tube pour les défauts de grande tailles.

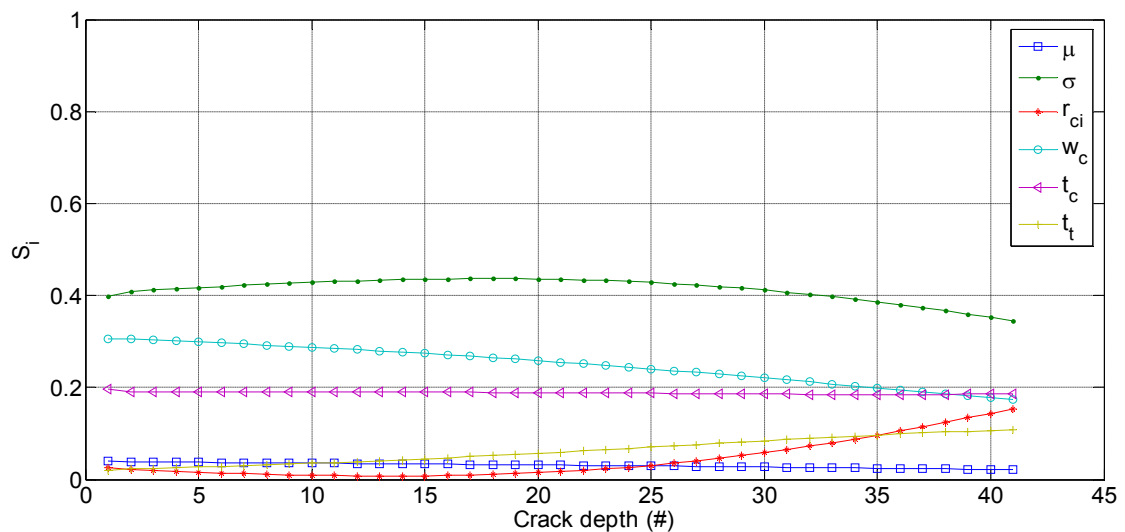


Fig.III.13 Indice de sensibilité de premier ordre pour tous les défauts.

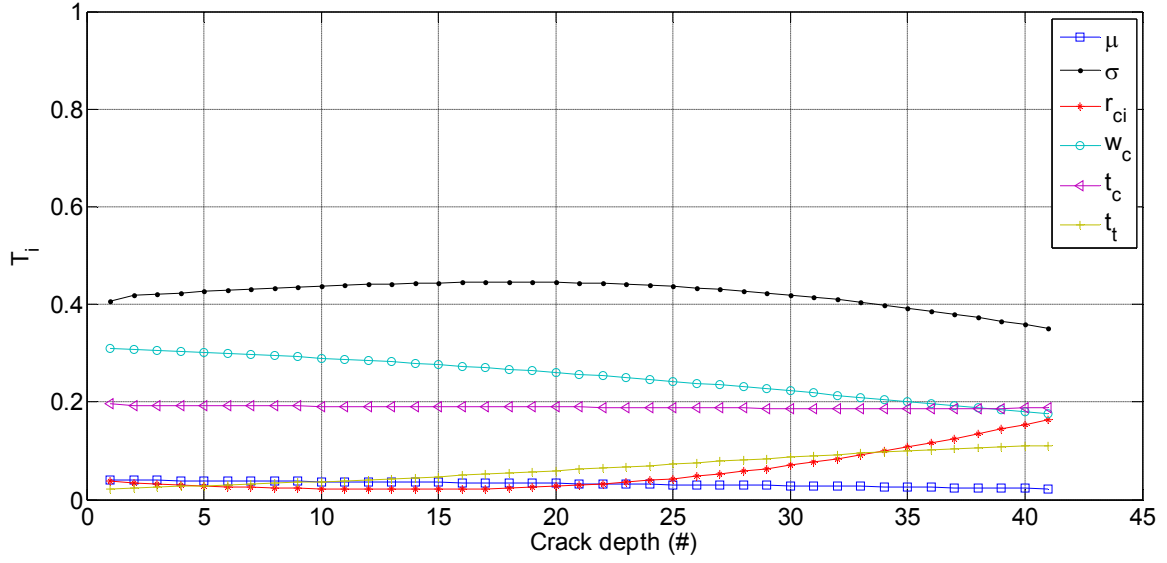


Fig.III.14 Indice de sensibilité total pour tous les défauts.

III.4.2. Approche stochastique par transformation géométrique

Pour ce faire, considérons les trois étapes suivantes :

Etape 1 : Transformation géométrique et *sampling*

Dans cette partie, la méthode de remaillage (RM) est remplacée celle de transformation géométrique (GT) afin d'échantillonner le système de CND-CF et générer par la suite l'impédance stochastique du capteur. Ici, pour chaque réalisation qui correspond à un vecteur aléatoire Θ des paramètres d'entrée, le maillage du domaine géométrique est généré une seule fois contrairement dans la méthode RM. Pour ce faire, un déplacement des coordonnées est effectué sans toucher à la matrice de connectivité, il s'agit de transformer les coordonnées des noeuds du domaine aléatoire en un nouvel domaine géométrique de référence (voir Annexe. D). La Fig.III.15 représente le domaine géométrique de base $D_{axi}(\Theta)$ et celui de référence (E) en utilisant une transformation géométrique. En effet, les domaines géométriques $D_{axi}(\Theta)$ et E sont divisés en 35 sous domaines. La taille du maillage de domaine géométrique de référence est fixe pendant toutes les réalisations et vaut $N_s = 14504$ volumes élémentaires. Le domaine géométrique du tube (matériau conducteur) est divisé en sous domaines (défaut inclus). Rappelons que le matériau conducteur est défini par ses paramètres physiques $\sigma(\Theta)$, $\mu(\Theta)$: sa conductivité électrique stochastique et sa perméabilité magnétique stochastique, respectivement.

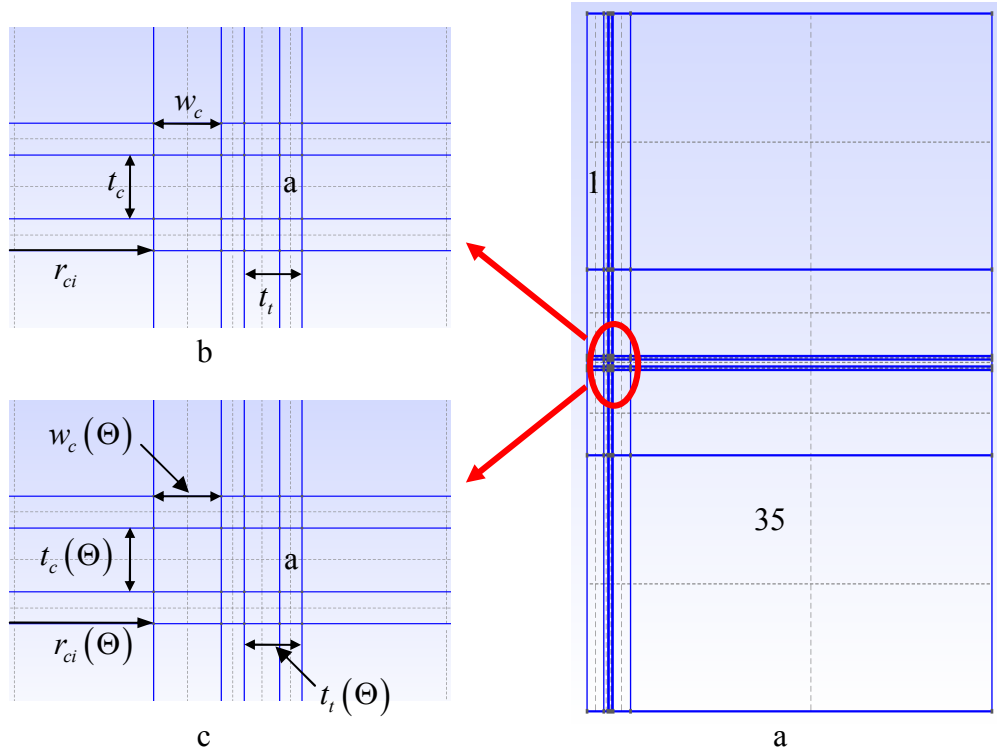


Fig.III.15 Domaine géométrique.

(a) sous domaines (1 : 35), (b) domaine de référence E , (c) domaine de base ($D_{axi}(\Theta)$).

Etape 2 : Metamodel et PDF

Dans la Fig.III.16, on représente la densité de probabilité PDF de l'impédance stochastique du capteur dans le cas 'avec défaut' obtenue par la technique GT. Cette même figure, représente une confrontation entre les deux caractéristiques de PDF obtenues par les techniques GT et RM. Dans les deux cas, le nombre d'échantillonnage considéré est $M = 10000$. Le metamodel utilisé a pour objectif de réduire le temps de simulation du modèle numérique en utilisant M_r à la place de M , avec $M_r < M$. Dans la Fig.III.17, on montre les deux caractéristiques de la PDF de l'impédance stochastique du capteur obtenues par la méthode de transformation géométrique et celle du metamodel : Z_{GT}, \hat{Z}_{GT} respectivement. D'après les figures Fig.III.16 et Fig.III.17, on peut constater que les impédances stochastiques du capteur calculées par les méthodes GT et RM sont similaires. Un faible écart est remarqué entre les impédances, Z_{GT}, \hat{Z}_{GT} . Notons que la caractéristique obtenue par le metamodel est maintenue précise avec un coût de simulation très réduit.

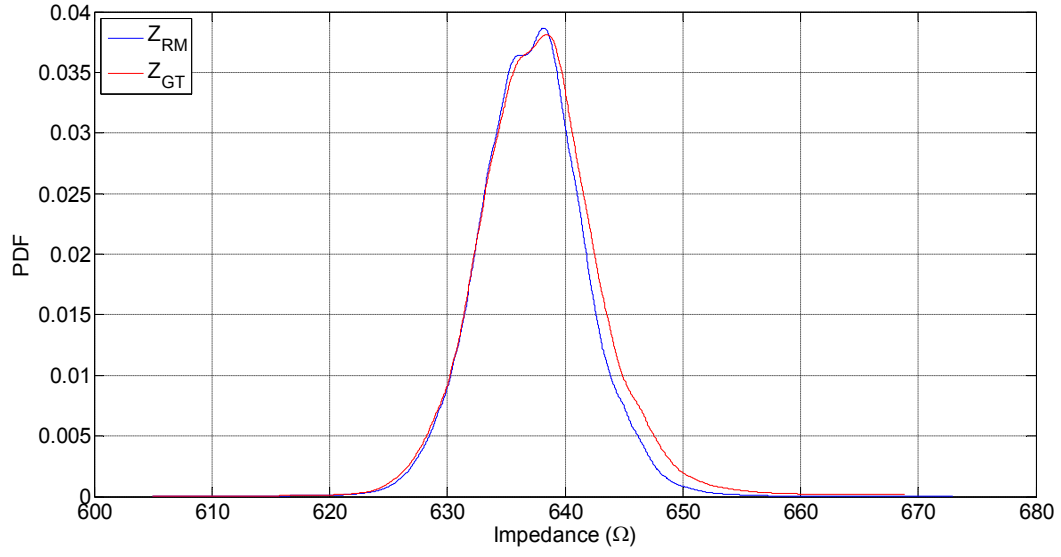


Fig.III.16 PDF de l'impédance du capteur par les méthodes RM et GT.

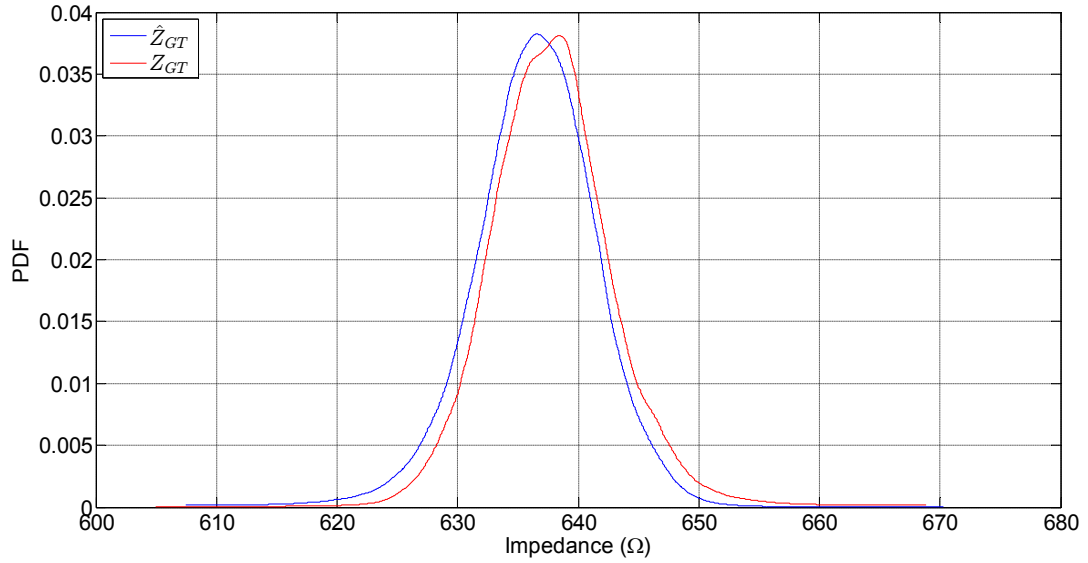


Fig.III.17 PDF de l'impédance du capteur par GT et metamodel.

Etape 3 : Estimation de la POD

Comme dans le cas précédent, la POD est estimée en utilisant l'expression (III.6). Désignons par POD_{GT} et \hat{POD}_{GT} les deux caractéristiques estimées de la probabilité de détection obtenues par les méthodes GT et metamodel, respectivement. La confrontation (Fig.III.18), montre de ces deux caractéristiques sont presque identiques. A titre d'exemple, pour les deux

méthodes GT et metamodel, on observe que la taille du défaut pour lequel la POD égale à 90% est $a_{90} = 0.8875$ mm. Dans le Fig.19, les deux caractéristiques de la POD obtenues par transformation géométrique et remaillage sont comparées, le nombre d'échantillons $M = 10000$. On remarque un faible écart entre ces deux caractéristiques, ce qui montre l'efficacité de la méthode GT. En effet, l'utilisation de la méthode GT accompagnée d'une approximation par le metamodel, offre les avantages suivants :

- Réponse du système identique à celle obtenue par GT.
- Un seul domaine géométrique est utilisé et le maillage est généré une seule fois, c.-à-d. absence du remaillage pour chaque réalisation. Cela est traduit par un temps de calcul très réduit.
- L'approximation de la réponse par un metamodel réduit considérablement le nombre de réalisations par rapport au nombre total d'échantillonnage.

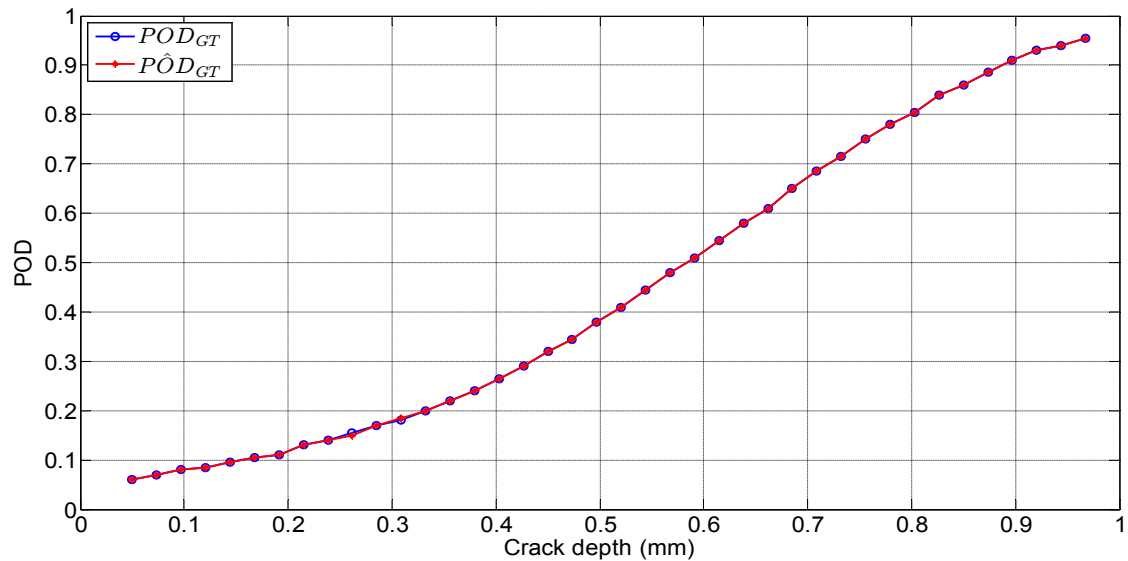


Fig.III.18 POD estimée par GT et GT accompagnée du metamodel.

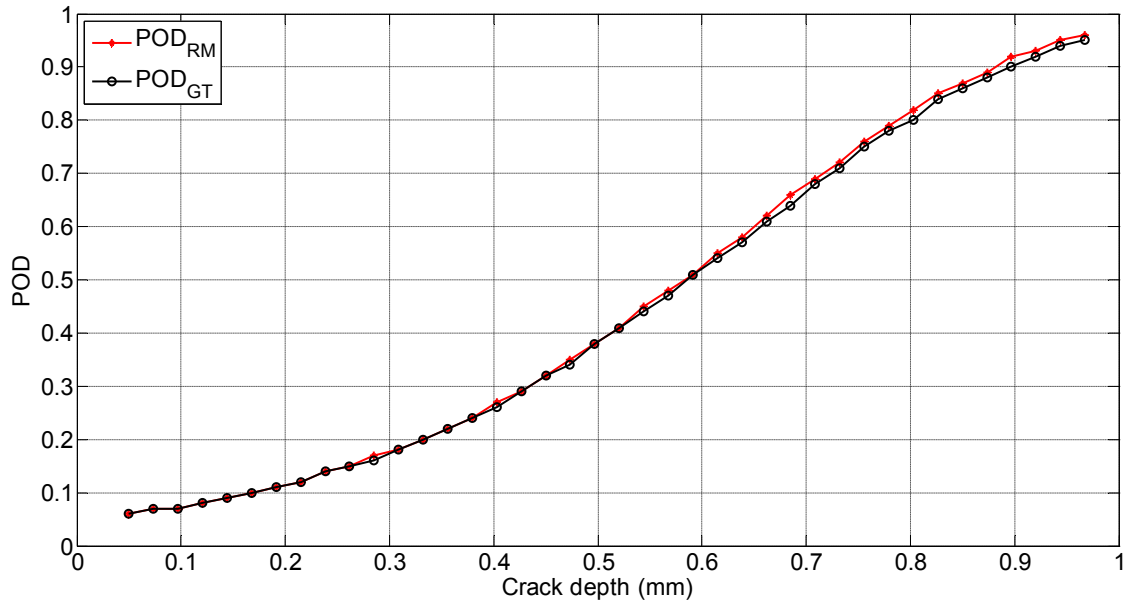


Fig.III.19 POD estimée par les méthodes GT et RM.

III.5 Réduction de la variance et estimation de la POD

Le schéma de la Fig.III.20 représente les étapes de l'estimation de la POD pour chaque paramètre fixé à sa valeur nominale ; dite probabilité de premier ordre du paramètre fixé X_i (POD_i). Egalement, cette figure représente l'estimation de la POD pour tous les paramètres fixés sauf le paramètre X_i ; dite probabilité totale (POD_{-i}). Notons, que nous avons utilisé le metamodel pour l'estimation.

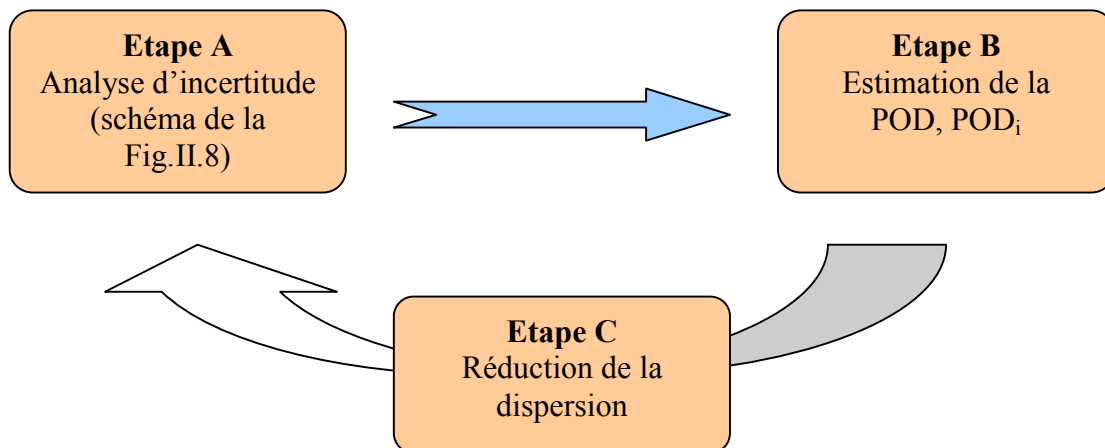


Fig.III.20 Estimation de la POD et réduction de la variance.

D'après la partie précédente relative à l'analyse de sensibilité, les paramètres principaux qui influencent sur la réponse du système stochastique sont la conductivité électrique du tube et les dimensions de la bobine. Dans la Fig.III.21, on représente une nouvelle POD (POD_2) estimée pour une nouvelle incertitude appliquée sur les paramètres d'entrée qui est de 2%. D'après cette figure, on observe la différence marquée sur la courbe de POD et l'influence de la variabilité des paramètres d'entrée sur la détection des défauts dans un problème de CND-CF. Dans cette figure, POD_1 représente la POD estimée pour la variabilité représentée sur le Tableau.III.2. A cet effet, la concentration sur la fabrication des capteurs précis représente un enjeu principal dans les systèmes de CND-CF afin de prendre en compte la variabilité/incertitude des paramètres d'entrée.

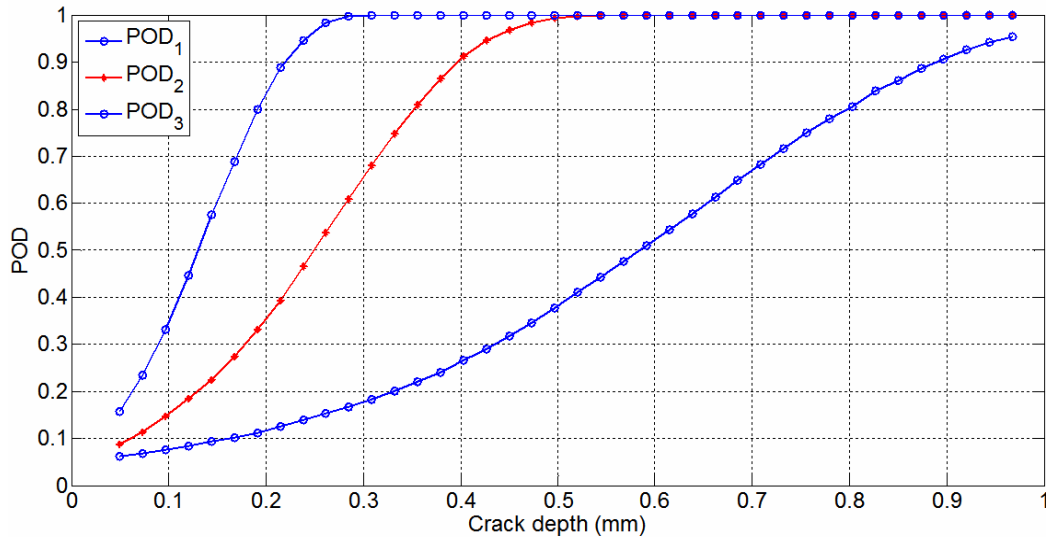


Fig.III.21 Confrontation des POD.
POD₁ par rapport au Tableau.III.2, et POD₂ estimée pour une incertitude réduite.

De la Fig.III.21, on remarque que pour une POD_2 et POD_3 de 90% la taille du défaut est de l'ordre de $a_{90} = 0.3961, 0.2194$, tandis que pour une POD_1 de 90% la taille du défaut est plus grande. Alors, l'influence de l'incertitude des paramètres d'entrée sur le contrôle est très grande. Les figures Fig.III.22 et Fig.III.23 montrent respectivement, les indices de sensibilité de premier ordre et total relatifs à cette réduction de variance. On remarque que les interactions entre les paramètres d'entrée sont très faibles, et par conséquent les deux indices de premier ordre et total sont égaux. De ces réalisations, on constate que les paramètres qui

ont une influence principale sur la réponse stochastique du système sont les dimensions de la bobine (largeur w_c et l'hauteur t_c) suivi par la conductivité électrique du tube (σ), avec une faible influence de la perméabilité magnétique (μ). On constate également l'augmentation de l'influence du rayon intérieur de la bobine (r_{ci}) et l'épaisseur du tube (t_t), pour les défauts de grande taille. Ces résultats sont très importants pour la qualité de l'inspection dans un système de contrôle non destructif par courants de Foucault.

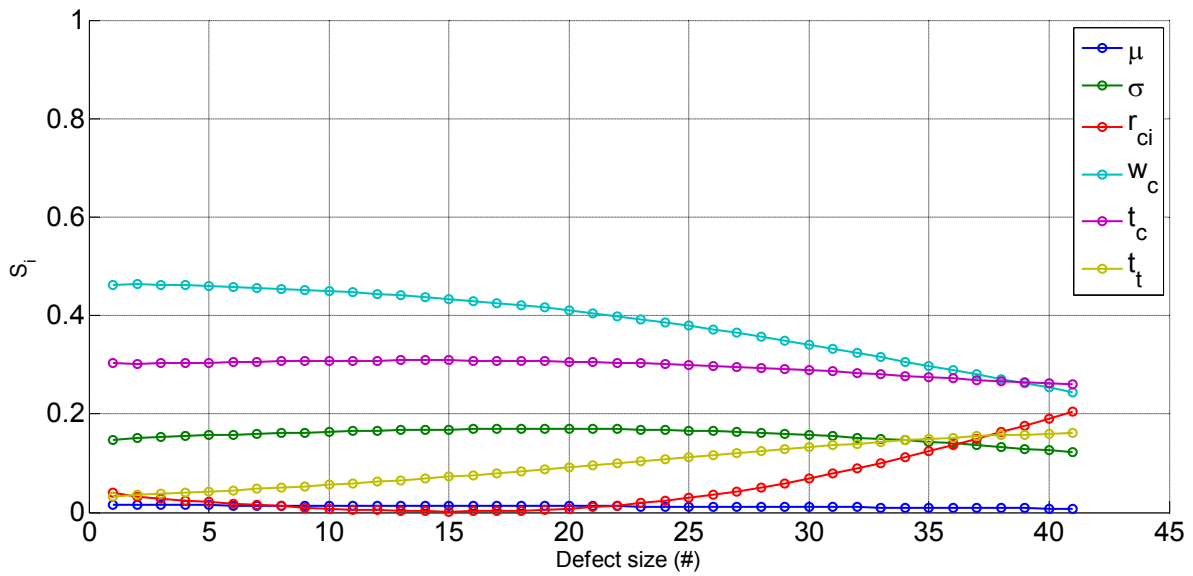


Fig.III.22 Indice de sensibilité de premier ordre.

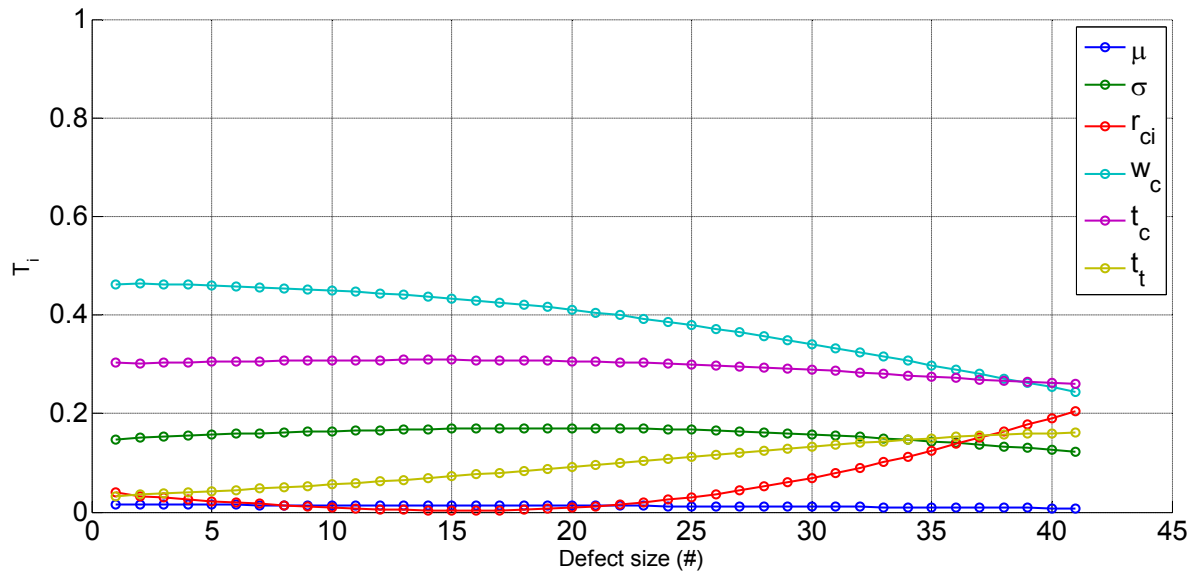


Fig.III.23 Indice de sensibilité total.

III.6 Effet de la densité du maillage

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de l'influence de la taille du maillage sur la réponse stochastique du système de CND-CF. Dans la Fig.III.24, on représente les tailles du maillage généré par le logiciel GMSH, avec $N_{S_i} = 9102, 14504, 19836$ et 25252 volumes élémentaires. La variabilité du modèle géométrique due à la variabilité des paramètres dimensionnels d'entrée est prise en considération par les deux méthodes RM et GT. Pour ce faire considérons les deux étapes suivantes :

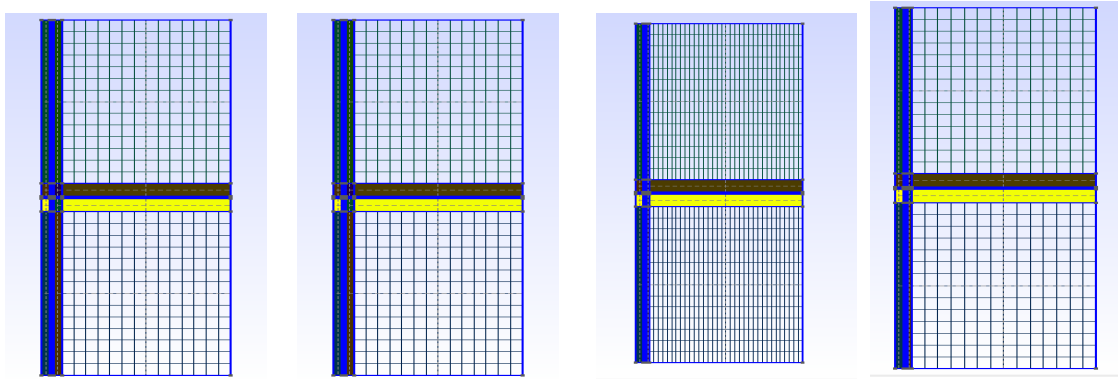


Fig.III.24 Différentes densités du maillage.

Etape 1 : Calcul de l'impédance stochastique du capteur

On refait les mêmes calculs que précédemment ; l'impédance stochastique du capteur (avec et sans défaut) et la POD sont déterminées par les méthodes de RM et GT accompagnée du metamodel. Pour la méthode RM, il s'agit de remailler le modèle géométrique pour chaque réalisation ayant un vecteur aléatoire des paramètres d'entrée. Cette procédure est refaite quatre fois selon les quatre tailles du maillage considérées $S_i (i=1:4)$. Dans le cas de la méthode GT, pour chaque taille de maillage $S_i (i=1:4)$ on génère un maillage de référence une seule fois. Le nombre de réalisations totale pour les deux méthodes (RM et GT) est $M = 10000$. Dans les Tableaux.III.4-5, pour les différentes tailles du maillage S_i , on représente respectivement la moyenne et l'écart type de l'impédance stochastique du capteur.

Tableau.III.4 Moyenne de Z_{RM} et Z_{GT} pour S_i .

	$\mu \{Z_{RM}\}$				$\mu \{Z_{GT}\}$			
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_0	a_1	a_2	a_3
S_1	627.5	628.5	640.09	661.94	627.48	628.48	639.98	661.37
S_2	625.23	626.17	637.80	659.55	624.97	625.94	637.43	658.61
S_3	624.68	625.68	637.17	658.99	624.67	625.70	637.12	658.69
S_4	624.38	625.31	636.9	658.71	624.34	625.32	636.82	658.28

Tableau.III.5 Ecart type de Z_{RM} et Z_{GT} pour S_i .

	$\sigma \{Z_{RM}\}$				$\sigma \{Z_{GT}\}$			
	a_0	a_1	a_2	a_3	a_0	a_1	a_2	a_3
S_1	9.40	9.40	9.73	10.79	9.64	9.62	9.93	10.97
S_2	9.47	9.54	9.88	10.95	9.6	9.57	9.88	10.94
S_3	9.39	9.38	9.69	10.73	9.78	9.75	10.07	11.61
S_4	9.40	9.40	9.69	10.69	9.82	9.79	10.09	11.09

D'après le Tableau.III.4, on remarque que la moyenne de l'impédance stochastique dans les deux méthodes RM et GT sont très semblables. Même si on raffine le maillage, la variation de la moyenne reste faible. Cette remarque est valable également pour l'écart type de Z_{RM} et Z_{GT} (Tableau.III.5). Notons que les profondeurs du défaut a_1 , a_2 , et a_3 , sont 0.05, 0.457 et 0.9675 mm, respectivement. Et a_0 représente l'état sans défaut.

Etape 2: Estimation de la POD

Ici, le metamodel est construit avec un nombre d'échantillonnage réduit afin d'approximer l'impédance stochastique du capteur dans les deux méthodes RM et GT. Le Tableau.III.6 représente la POD estimée par les méthodes RM et GT avec l'utilisation du metamodel linéaire dont le polynôme considéré est de degré $p=1$. Les résultats obtenus peuvent être

comparés avec ceux de référence obtenus avec nombre d'échantillonnage $M = 10000$; $POD_{ref} = [0.06, 0.38, 0.95]$ pour les tailles de défaut a_1 , a_2 , et a_3 , respectivement.

Tableau.III.7 POD pour différentes méthodes.

	POD_{RM}			POD_{GT}		
	a_1	a_2	a_3	a_1	a_2	a_3
S_1	0.06	0.38	0.96	0.06	0.37	0.95
S_2	0.06	0.37	0.95	0.06	0.37	0.95
S_3	0.06	0.39	0.96	0.06	0.35	0.94
S_4	0.06	0.39	0.96	0.06	0.38	0.95

III.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons utilisé les deux méthodes dites de remaillage et de transformation géométrique afin d'estimer la probabilité de détection des défauts POD en fonction de la variation de la profondeur du défaut. Cette étude est très importante pour les systèmes de contrôle non destructif par courants de Foucault. La construction polynomiale par les polynômes de Legendre est utilisée pour réduire significativement le nombre d'échantillonnage soit par la méthode de remaillage, soit par la méthode de transformation géométrique. Une très bonne cohérence est observée de la réponse du modèle avec un faible écart entre les deux méthodes.

Conclusion Générale

Dans ce travail, nous avons examiné l'estimation de la probabilité de détection des défauts POD dans un système de control non destructif par courants CND-CF. Cette étude est menée en la présence de l'incertitude des variables d'entrée. Plusieurs outils mathématiques et probabilistes avec la méthode numérique de discrétisation MVF ont été investigués. Un premier modèle numérique relatif au CND-CF a été développé et simulé. Toutefois, ce modèle numérique est de réponse déterministe et ne tient pas en compte la variabilité/incertitude des paramètres d'entrée du système étudié.

L'estimation de la POD consiste à quantifier la variabilité de la réponse stochastique du système en fonction de la variabilité des paramètres d'entrée ; paramètres physiques et dimensionnels. La variabilité de ce dernier paramètre produit immédiatement un nouveau modèle géométrique pour chaque nouveau paramètre. En effet dans ce travail, cette variabilité du modèle géométrique due à la variabilité des paramètres dimensionnels d'entrée est prise en considération par deux méthodes à savoir la méthode de remaillage et la méthode dite de transformation géométrique. Afin d'estimer la POD, un plan d'échantillonnage a été utilisé pour produire le nombre de réalisations souhaitées de la réponse stochastique du système. Pour minimiser le temps de calcul remarquable, un metamodel a été exploité, et il s'agit de générer un nombre réduit de réalisations. La construction du metamodel est basée sur le chaos polynomial à base des polynômes de Legendre. Par rapport à la technique de remaillage, la méthode de transformation géométrique réduit d'une façon considérable le temps de calcul ainsi que les erreurs dues au remaillage.

Dans ce travail, l'analyse de la sensibilité du système a été menée en se basant sur l'analyse de la variance dont les indices dits indices de Sobol ont été considérés. Une telle analyse s'avère très importante dans les applications de CND-CF. Cette analyse est menée en considérons des paramètres d'entrée aléatoires générés par le chaos polynomial. En effet, l'objectif de cette analyse consiste à la quantification de l'influence des paramètres d'entrée sur la réponse stochastique du système CND-CF, et par conséquent sur la qualité détection des défauts. Les résultats obtenus montrent la validité et l'efficacité des modèles utilisés et développés.

Annexe A : Effet de Peau

On considère un courant sinusoïdal induit dans un matériau conducteur homogène (Fig.A.1). L'intensité des courants induits dans le matériau conducteur est caractérisée par la conductivité électrique et la perméabilité magnétique. Ce courant décroît avec la profondeur ; c'est l'effet de peau.

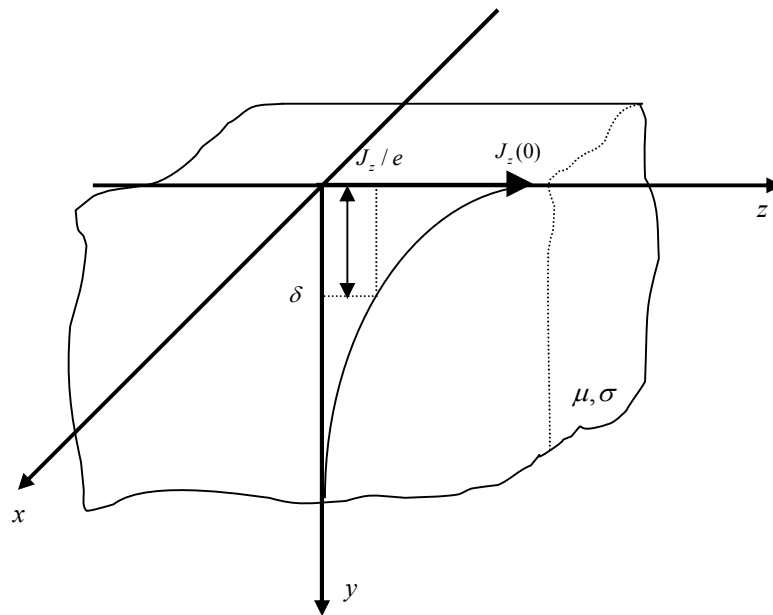


Fig.A.1 Courant sinusoïdal induit dans un matériau.

Les lois régissant ce phénomène sont :

$$\text{rot}\mathbf{H} = \mathbf{J} \Rightarrow \text{rot}\mathbf{B} = \mu\mathbf{J} \quad \text{A.1}$$

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{E} = \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \quad \text{A.2}$$

Soit :

$$\text{rot}(\text{rot}\mathbf{J}) = -j\omega\mu\sigma\mathbf{J} \quad \text{A.3}$$

On considère que la composante ‘ z ’, on trouve :

$$\frac{\partial^2 J_z}{\partial y^2} = -j\omega\mu\sigma J_z \quad \text{A.4}$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$J_z(y) = c_1 e^{-ky} + c_2 e^{ky} \quad \text{A.5}$$

Avec c_1 et c_2 sont des constants. Si le matériau conducteur est supposé infini, donc $c_2 = 0$ et :

$$J_z(y) = c_1 e^{-ky} \quad \text{A.6}$$

avec $k = (1+j)\sqrt{\frac{1}{2}\omega\mu\sigma}$. Lorsque $y = 0$, $J_z = J_{z0}$, donc $c_1 = J_{z0}$. Et l’expression du courant dans la plaque devient

$$J_z(y) = J_{z0} e^{-(1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}y} \quad \text{A.7}$$

Cette équation indique que le courant induit (de Foucault) dans le matériau conducteur décroît d’une façon exponentielle avec l’augmentation. Sous une autre forme, elle s’écrit :

$$J_z = J_{z0} e^{-\sqrt{\pi f \mu \sigma} y} \quad \text{A.8}$$

Avec J_{z0} est le courant de Foucault à la surface du matériau conducteur, ‘ y ’ est la distance à la surface, J_z est le courant de Foucault à la profondeur ‘ y ’ du matériau conducteur, et f est la fréquence. Définissons la profondeur de pénétration comme suit :

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{\pi f \mu \sigma}} \quad \text{A.9}$$

Alors J_z devient :

$$J_z = J_{z0} e^{-\frac{y}{\delta}} \quad \text{A.9}$$

Généralement, la pénétration ou le courant de Foucault est $1/e$ de celui à la surface du matériau conducteur. On a :

$$J_z/J_{z0} = e^{-\frac{y}{\delta}} = 1/e \quad \text{A.10}$$

Dans un procédé de CND-CF, souvent, les paramètres influents la profondeur de pénétration (fréquence, conductivité électrique, perméabilité magnétique) sont choisis de telle sorte que la profondeur de pénétration δ soit supérieur à $1/3$ de la profondeur de contrôle afin d'avoir un contrôle efficace. Pour les défauts profonds à la surface du matériau à tester, la fréquence d'excitation doit être diminuée pour augmenter δ .

Annexe B : Discrétisation par la Méthode des Volumes Finis du Gradient

Dans le cas ou le maillage est orthogonal on travail avec des coordonnées cartésiennes x et y , si le maillage est non-orthogonal on exprime le terme du gradient comme suit :

$$\text{grad } A = \frac{\partial A}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial A}{\partial y} \mathbf{j} = \frac{\partial A}{\partial n} \mathbf{n} + \frac{\partial A}{\partial \eta} \mathbf{e}_\eta \quad (\text{B.1})$$

Avec \mathbf{n} et \mathbf{e}_η sont les vecteurs unitaires normal et tangentiel à la facette (Fig.B.1), respectivement. Ces vecteurs unitaires peuvent être calculés avec les équations suivantes :

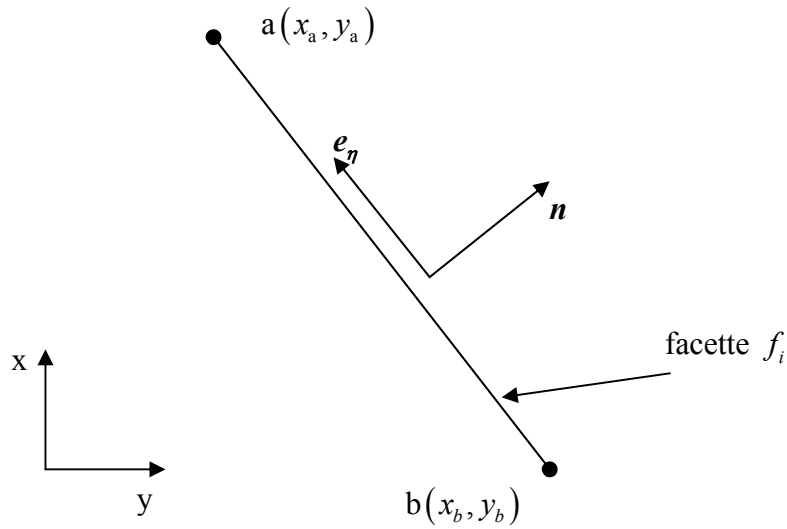


Fig.B.1 Vecteurs normal et tangentiel pour une facette.

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \mathbf{i} - \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \mathbf{j} = \frac{y_b - y_a}{\Delta \eta} \mathbf{i} - \frac{x_b - x_a}{\Delta \eta} \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_\eta &= \frac{\Delta x}{\Delta \eta} \mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta \eta} \mathbf{j} = \frac{x_b - x_a}{\Delta \eta} \mathbf{i} + \frac{y_b - y_a}{\Delta \eta} \mathbf{j} \\ \mathbf{e}_c &= \frac{x_N - x_P}{\Delta c} \mathbf{i} + \frac{y_N - y_P}{\Delta \eta} \mathbf{j} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Les vecteurs \mathbf{n} , \mathbf{e}_η et \mathbf{e}_c sont représentés sur la Fig.B.2.

La projection du vecteur est donnée par :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial n} \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_c &= \frac{\partial A}{\partial n} \cos(\theta) \\ \frac{\partial A}{\partial \eta} \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_c &= -\frac{\partial A}{\partial \eta} \sin(\theta)\end{aligned}\tag{B.3}$$

Le $\text{grad}A$ dans la direction \mathbf{e}_c est égale à $\frac{\partial A}{\partial c} \mathbf{e}_c$ Soit :

$$\frac{\partial A}{\partial c} = \frac{\partial A}{\partial n} \cos(\theta) - \frac{\partial A}{\partial \eta} \sin(\theta)\tag{B.4}$$

Considérons le terme $\text{grad}A \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial A}{\partial n}$, alors :

$$\text{grad}A \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial A}{\partial n} = \frac{\partial A}{\partial c} \frac{1}{\cos(\theta)} - \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\tag{B.5}$$

Avec :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial c} &= \frac{A_N - A_P}{\Delta c} \\ \frac{\partial A}{\partial \eta} &= \frac{A_b - A_a}{\Delta \eta}\end{aligned}\tag{B.6}$$

Dans la bibliographie, les termes $A \frac{\partial A}{\partial c}$ et $\frac{\partial A}{\partial \eta}$ sont appelés le gradient direct et la diffusion transversale, respectivement. Soit :

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_c \\
\sin(\theta) &= \mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_c \\
\tan(\theta) &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\mathbf{e}_\eta \cdot \mathbf{e}_c}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_c}
\end{aligned} \tag{B.7}$$

La forme finale du terme $grad\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ devient alors :

$$grad\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \Delta\eta_i = \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_c} \left(A_{N_i} - A_p \right) \frac{\Delta\eta_i}{\Delta c_i} - \frac{\mathbf{e}_c \cdot \mathbf{e}_\eta}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_c} (A_b - A_a) \tag{B.8}$$

Avec A_b, A_a sont les potentiels dans les noeuds a, b et calculés par la moyenne des potentiels dans chaque noeuds par l'expression :

$$A_b = \sum_{k_b} \frac{A_{k_b}}{N_{k_b}}, A_a = \sum_{k_a} \frac{A_{k_a}}{N_{k_a}} \tag{B.9}$$

Annexe C : Théorie de Probabilité
[Ross Sheldon 1997, Bluman 2014].

C.1. Espace d'échantillonnage et événement

L'ensemble de tous les résultats possibles d'une expérience est connu sous le nom d'espace d'échantillons de l'expérience, noté S . Tout sous-ensemble de l'espace d'échantillons est connu sous le nom d'événement. Supposons deux événements E et F , on a :

- $E \cup F$ s'appelle l'union de E et F .
- $E \cap F$ s'appelle l'intersection de E et F .
- Si $E \cap F = \Phi$ alors E et F sont dits exclusif mutuellement.
- E_c est le complément de E .
- Si tous les points de E sont également en F , alors nous disons que E est contenu en
- $F : E \subset F$ ou $(F \supset E)$.
- Si $E \subset F$ et $F \subset E$, nous disons que E et F sont égaux : $E = F$.

Citons quelques règles :

- Lois commutatives $E \cup F = F \cup E$, $EF = FE$
- Lois associatives $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$, $(EF)G = E(FE)$
- Lois distributive $(E \cup F)G = EG \cup FG$, $(EF) \cup G = (E \cup G)(F \cup G)$
- Lois de DeMorgan

$$\left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n E_i^c \quad (C.1)$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n E_i^c \quad (C.2)$$

C.2. Axiomes de probabilité

Définissons la probabilité d'un événement E par $P(E)$. Nous la définissons comme étant le nombre de fois dans les n premières répétitions de l'expérience que l'événement E se produit, soit :

$$P(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(E)}{n} \quad (\text{C.3})$$

Considérons une expérience dont l'espace d'échantillon est S . Pour chaque événement E de l'espace d'échantillon, nous supposons qu'un nombre $P(E)$ est défini et satisfait aux trois axiomes suivants :

$$\begin{aligned} 0 &< P(E) < 1 \\ P(S) &= 1 \\ P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Propositions :

$$P(E^c) = 1 - P(E)$$

$$\text{If } E \subset F, \text{ donc } P(E) \leq P(F) \quad (\text{C.5})$$

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

Cette proposition pourrait être prouvée en utilisant le diagramme de Venn (Fig.C.1).

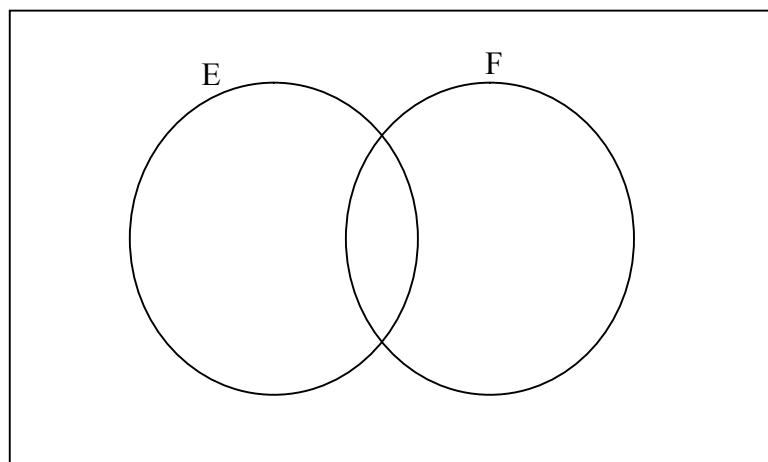


Fig.C.1 diagramme de Venn

C.3. Probabilité conditionnelle et formule de Bayes

La probabilité conditionnelle que l'événement E se produit sachant que l'événement F s'est produit est :

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \quad (\text{C.6})$$

si $P(F) > 0$, on a

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E \cap F) + P(E \cap F^c) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)P(F^c) \\ &= P(E|F)P(F) + P(E|F^c)[1 - P(F)] \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

La formule de Bayes s'écrit ainsi:

$$\begin{aligned} P(E|F_j) &= \frac{P(E \cap F_j)}{P(F_j)} \\ &= \frac{P(E|F_j)P(F_j)}{\sum_{i=1}^n P(E|F_i)P(F_i)} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

C.4. Fonctions de distribution

La fonction de distribution F de la variable aléatoire X est définie pour tous les nombres réels ' b ' ($-\infty < b < \infty$) par :

$$F(b) = P\{X \leq b\} \quad (\text{C.9})$$

Quelques propriétés de F :

- Si $a < b$ donc $F(a) \leq F(b)$.
- $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b) = 1$.
- $\lim_{b \rightarrow -\infty} F(b) = 0$.

Annexe D : Transformation Géométrique

D.1. Principe de la méthode

La méthode de transformation géométrique est basée, pour chaque déformation du maillage, sur la relocalisation des noeuds sans changer leurs connectivités. Cette méthode consiste, comme première étape, à générer le maillage du domaine géométrique dit ‘domaine de référence’, ensuite comme deuxième étape de relocaliser les coordonnées des noeuds pour chaque déformation. La méthode de transformation a été proposée pour la première fois pour résoudre les équations aux dérivées partielles [Xiu 2006]. Cette méthode a été appliquée également pour résoudre les problèmes électromagnétiques [Mac 2010], [Nguyen 2018]. Et dans ce travail [Abdelli 2019], la méthode a été utilisée pour la prise en compte de la variabilité de la géométrie dans un problème de contrôle non destructif par courants de Foucault dont l’objectif est l’estimation de la probabilité de détection POD.

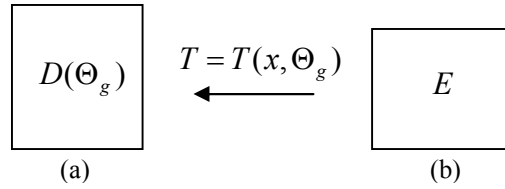


Fig.D.1 Méthode de transformation géométrique.
(a) domaine transformé $D(\Theta_g)$, (b) domaine initial (E)

Dans la méthode de transformation géométrique le domaine aléatoire $D(\Theta_g)$ (avec $\Theta_g \subset \Theta$) du problème est transformé en un nouveau domaine déterministe de référence E . Alors, il existe une transformation aléatoire T [$T = T(x, \Theta_g)$] qui ramène les coordonnées du domaine aléatoire $D(\Theta_g)$ en un domaine déterministe E (Fig.D.1). Avec x, Θ_g représentent les coordonnées cartésiennes du domaine $D(\Theta_g)$ et du nouveau domaine E , respectivement. Cette transformation est basée sur le changement de positionnement des coordonnées des

noeuds d'un domaine en un autre en gardant leurs connectivités. Pour notre application, il s'agit de repositionner pour chaque réalisation les coordonnées des noeuds du maillage. L'organigramme de la Fig.D.2 résume les étapes suivies pour l'estimation de l'impédance du capteur dans notre application, en utilisant les deux techniques de prise en compte de la variabilité du domaine géométrique : la transformation géométrique (TG) et le remaillage (RM).

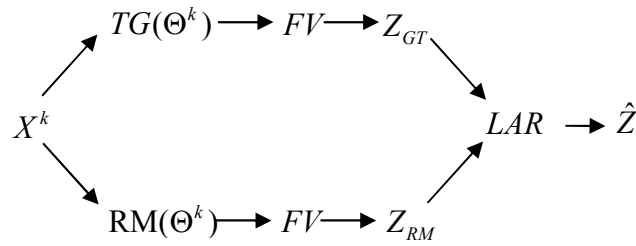


Fig.D.2 Etapes de l'estimation de Z par RM et TG.

D.2 Exemple d'application

Dans cet exemple, on considère une bobine circulaire de dimensions aléatoires dans un domaine D de frontière. Dans la Fig.D.3, D_{axi} est le domaine géométrique axisymétrique équivalent, avec r_{ci} , w_c et t_c sont les dimensions aléatoires uniformes et indépendantes de la bobine définies par les incertitudes: $w_c(\zeta), t_c(\zeta) \sim \mathcal{U}[\pm 10(w_c, t_c)]$ et $r_{ci}(\zeta) \sim \mathcal{U}[\pm 5(r_{ci})]$.

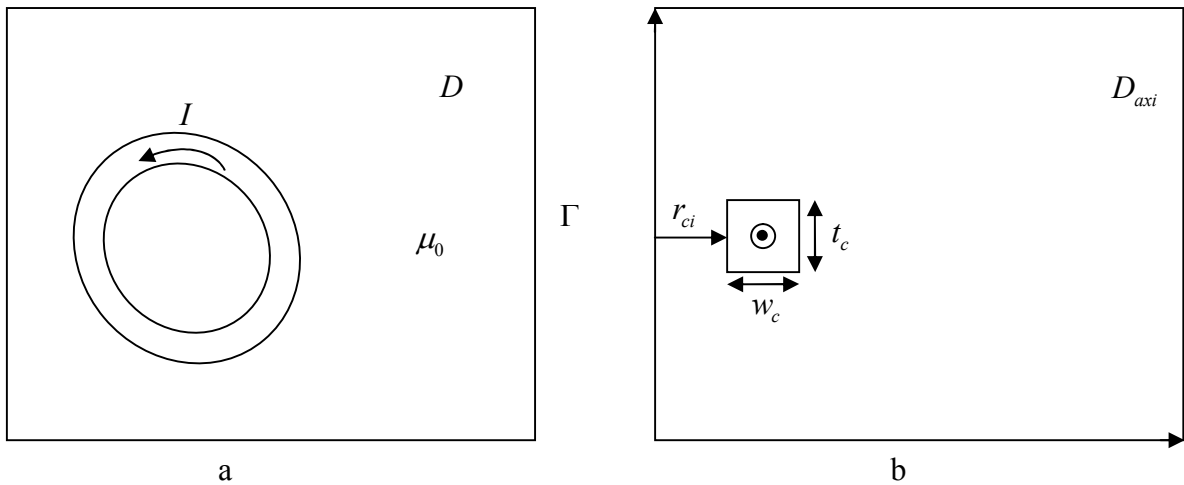


Fig.D.3 Exemple d'application.

(a) Domaine du problème, (b) Domaine axisymétrique équivalent.

Désignons par $Z(\zeta)$ l'impédance de la bobine et qui représente la quantité d'intérêt à calculer en utilisant le domaine aléatoire défini par $D_{axi}(\zeta)$ (Fig.D.4).

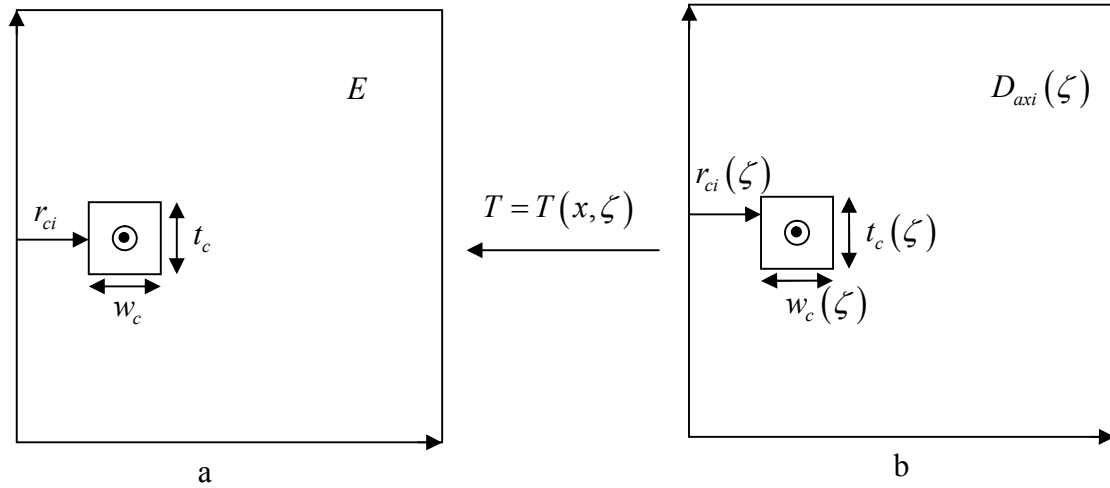


Fig.D.4 Application de la transformation géométrique.

(a) Domaine de référence E , (b) Domaine aléatoire initial $D_{axi}(\zeta)$.

Dans cette application on s'intéresse à la détermination de la fonction de densité de probabilité (PDF) relative à la variation de la l'impédance. En effet cette impédance de valeur aléatoire est estimée par les deux méthodes RM et GT. Le domaine géométrique de base (initial) ayant des dimensions aléatoires $D_{axi}(\zeta)$ est transformé en un nouveau domaine de référence E à l'aide de la transformation géométrique T (Fig.D.4). Par la suite ces deux domaines ($D_{axi}(\zeta)$ et E) vont être divisés en sous domaines (1-9 sous domaines), comme il est montré sur la Fig.D.5. Ce problème a été résolu par la formulation magnétostatique formulée en potentiel vecteur magnétique. Dans la Fig.D.6, on représente la fonction de densité de probabilité (PDF) de l'impédance aléatoire de la bobine obtenue par les deux méthodes RM et GT. Le nombre des volumes élémentaires du maillage est $N_s = 6930$.

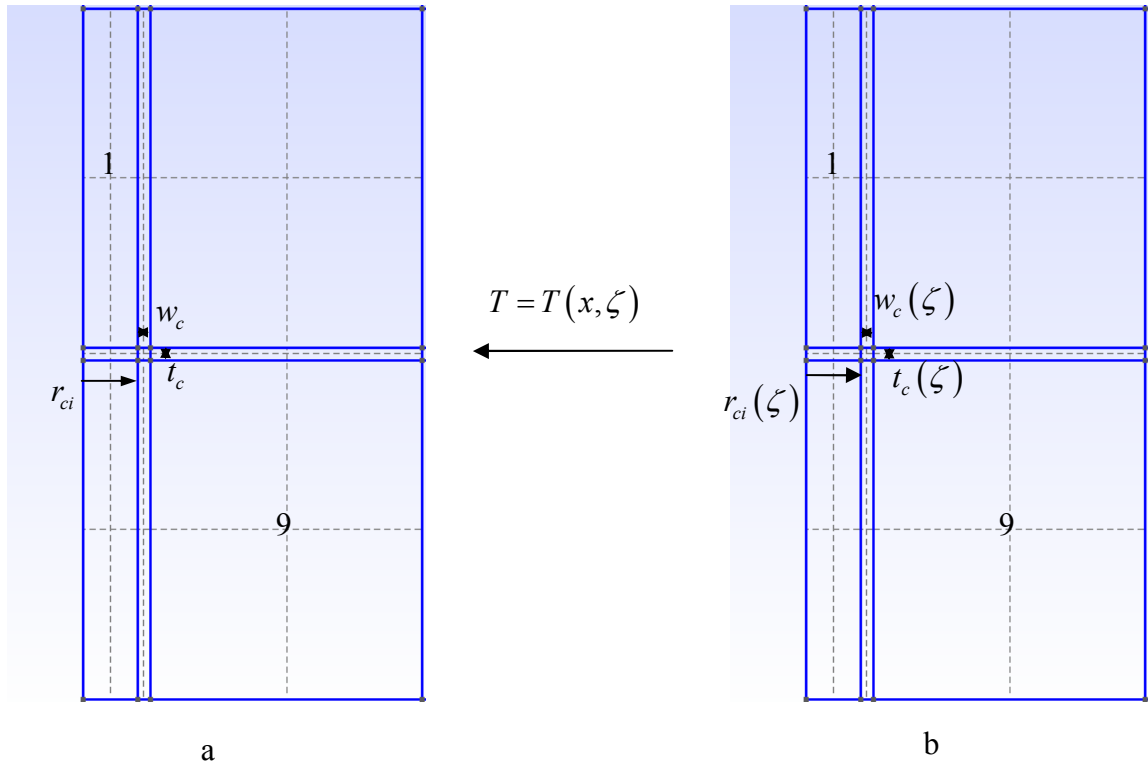


Fig.D.5 Subdivision en sous domaines.

(a) Domaine de référence E , (b) Domaine initial $D_{axi}(\zeta)$.

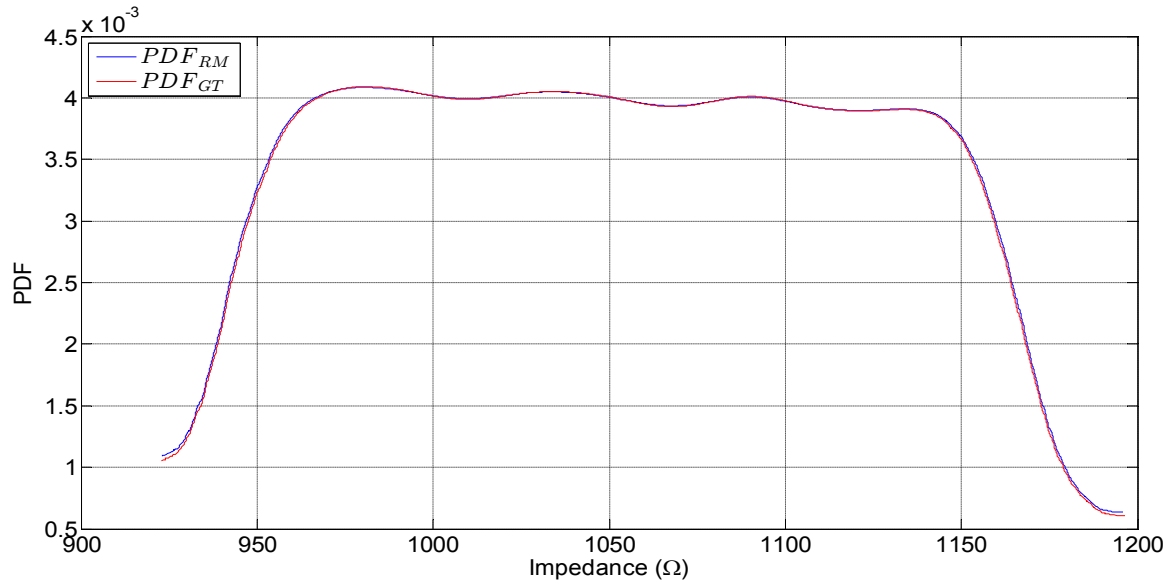


Fig.D.6 PDF de l'impédance de la bobine obtenue par les méthodes RM et GT.

D.3 Influence de la densité du maillage

Dans le Tableau.D.1, on montre la moyenne et l'écart type de l'impédance de la bobine stochastique pour différentes densités du maillages: S_i ($i=1:5$), avec $N_{S_i} = 320, 1620, 2990, 6930, 9720$. Notons que dans cette application, nous avons utilisé les deux méthodes RM et GT.

Tableau.C.1 Comparaison entre les méthodes (RM & GT)

Maillage	$Z_{RM}(\Omega)$		$Z_{GT}(\Omega)$	
	Moyenne	Ecart type	Moyenne	Ecart type
S_1	1683	142	1682	110
S_2	1257	97.5	1257	83
S_3	1107	81	1107	75
S_4	1056	72.5	1056	72.5
S_5	1058	74	1058	72.5

D'après le Tableau.D.3, on constate que les résultats obtenus par les deux méthodes (RM et GT) sont très proches. En revanche, la méthode de transformation géométrique est plus simple à implanter, avec un temps de calcul moins coûteux. En plus, dans la technique GT le maillage doit être généré une seule fois contrairement à la méthode RM. De point de vue densité de maillage, on remarque que les meilleurs résultats sont obtenus pour les grandes densités de maillage c.-à-d. pour les maillages S_i , avec $i = 4:5$.

Bibliographie

Abdelli, D. E. Nguyen, T. T. Clénet, S. and Cheriet, A., Stochastic Metamodel for Probability of Detection Estimation of Eddy-Current Testing Problem in Random Geometric, in IEEE Transactions on Magnetics, vol. 55, no. 6, pp. 1-4, June 2019, Art no. 6200604.

Abramowitz, M., and I. Stegun, (1970). Handbook of mathematical functions. Dover Publications, Inc.

Annis, C., and Knopp, J., “Comparing the effectiveness of a90/95 calculations”, Proceedings of Annual Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation, Vol. 26, pp. 1767—1774, 2007.

Beddek, K., Propagation d’incertitudes dans les modèles éléments finis en électromagnétisme – Application au contrôle non destructif par courants de Foucault. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, décembre 2012.

Beddek, K.; Clénet, S.; Moreau, O.; Costan, V.; Le Menach, Y.; and Benabou, A.; Adaptive method for non-intrusive spectral projection application on a stochastic eddy current NDT problem, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 48, N°2, 2012, pp 759-762.

Berens, A.P., and Hovey, P.W. (1981), "Evaluation of NDE reliability characterisation", AFWAL-TR-81-4160, Vol. 1, Air Force Wright-Aeronautical Laboratories, Wright-Patterson Air Force Base.

Berens, A.P., and Hovey, P.W., "Flaw Detection Reliability Criteria Volume I--Methods and Results, Final Report," Report AFWAL-TR-84-4022 Volume I, United States Air Force Material Laboratory, Wright-Patterson Air Force Base, 1984.

Berens, A. P., NDE reliability data analysis: non destructive evaluation and quality control. ASM Metals handbook, 17:689-701, 1988.

Blatman G., and B. Sudret, (2010): Efficient computation of global sensitivity indices using sparse polynomial chaos expansions. Reliability Engineering and System Safety;95:1216-1229.

Blatman, G., and B. Sudret, (2011): Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on Least Angle Regression. J. Comput. Phys.;(230):2345–2367.

Bluman, Allan G., “Elementary Statistics: A step by step approach, ninth edition”, McGraw-Hill Education, 2 Penn Plaza, New York, NY 10121, 2014.

Bossavit, A., "Electromagnétisme en vue de la modélisation", édition Springer-Verlag, 1993.

Bossavit, A., « Mixed-hybrid methods in magnetostatics : complementarity n one stroke». IEEE Trans. Mag, Vol. 39, No 3, pp1099-1102,2003.

Bucher, C.-G. and Bourgund, U., 1990, A fast and efficient response surface approach for structural reliability problems, Struct. Safety, 7, 57-66.

Bryant, L.E., Nondestructive testing handbook. Second edition, Volume 3: Radiography and radiation testing. United States: N. p., 1985. Web.

Browne., Thomas, “Regression Models and Sensitivity Analysis for Stochastic Simulators: Applications to Non-Destructive Examination”, these de doctorat, Université Paris Descartes 2017.

Cameron R. H., and W. T. Martin, (1947): The orthogonal development of non-linear functionals in series of Fourier-Hermite functionals. Annals of Mathematics;48(2):385–392.

Chavanne, J., « Contribution à la modélisation des systemes statiques à aimants permanents ». Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1988.

Clénet, S.,“Uncertainty quantification in computational electromagnetics:The stochastic approach,” Int. Compumag Soc. Newslett., vol. 20,no. 1, pp. 2–12, Mar. 2013.

Deng, Y., Liu, X., and Yang, G., “Model based POD techniques for enhancing reliability of steam generator tube inspection,” in Proc. IEEE Conf. Prognostics Health Manage. (PHM), Jun. 2011, pp. 1–7.

DUMONT-FILLON, J., (1996), « Contrôle non destructif (CND) », Techniques de l’Ingénieur, Référence R1400.

Efron, B., T. Hastie, I. Johnstone, and R.Tibshirani, (2004). Least angle regression. Annals of Statistics; 32, 407-499.

EW-512-6, Nondestructive Testing Methods, Training Workbook, the Staff of Hobart Institute of Welding Technology, 2009.

Ferrari, M. , Bellini, S., Importance Sampling simulation of turbo product codes. ICC2001, The IEEE International Conference on Communications, vol. 9, pp. 2773-2777, June 2001.

Forrestre, Alexandre I. J., Engineering design via surrogate modelling : a practical guide, John Willey & Sons Ltd, 2008.

Gandossi, L., and Annis, C., (2010) ENIQ report No 41: “Probability of Detection Curves: Statistical Best-Practices”, ERU24429 EN – 2010.

- Ghanem, R. G., and Spanos, P. D.** Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach. New York, NY, USA: Dover, 1991.
- KETTUNEN, L., FORSMAN, K., AND BOSSAVIT, A.** Gauging in whitney spaces. IEEE Trans. On Magnetics 35, 3 (1999), 1466–1469.
- HENNERON, T.** Contribution à la prise en compte des grandeurs globales dans les problèmes d'électromagnétisme résolus avec la méthode des éléments finis. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, décembre 2004.
- Homma T, A. Saltelli,** (1996): Importance measures in global sensitivity analysis. Reliability Engineering and System Safety;52:1-17.
- Homma, T. and A. Saltelli** (1996). Importance measures in global sensitivity analysis of non linear models. Reliab. Eng. Sys. Safety 52, 1–17.
- Ida, N., and Bastos, J. P. A.,** Electromagnetics and Calculation of Fields. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1992.
- Janon. A.,** "Analyse de sensibilité et réduction de dimension – Application à l'océanographie," These de doctorat, Mathématiques générales [math.GM]. Universite de Grenoble, 2012
- Jiles, D.C., J.L. Atherton.** “ Theory of ferromagnetic hysteresis”. Journal of magnetism and magnetic materials, Vol. 61, pp 48-60, 1986.
- Kabban C and Derriso M** (2011) Certification in structural health monitoring systems. Proceedings of the Eighth International Workshop on Structural Health Monitoring. Stanford, USA, pp. 2429–2436.
- Keese, A. (2004).** A general purpose framework for stochastic finite elements. Ph. D. thesis, Technische Universität Braunschweig, Germany.
- Le Gratiet, L., Iooss, B., Blatman, G., Browne, T., Cordeiro, S., and Goursaud, B.,** “Model assisted probability of detection curves: New statistical tools and progressive methodology,” J. Nondestruct. Eval., vol. 36, pp. 8–36, Mar. 2017.
- Le Maître, O., Reagan, M., Najm, H. , Ghanem, R. and Knio, O. (2002).** A stochastic projection method for fluid flow – II. Random process. J. Comput. Phys. 181, 9–44.
- Le Maître, O. P., and Knio, O. M.,** Spectral Methods for Uncertainty Quantification. Dordrecht, The Netherlands, Springer, 2010.

LE MENACH, Y., «Contribution à la modélisation numérique tridimensionnelle des systèmes électrotechnique : prise en compte des inducteurs. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Technologies de Lille, 1999.

Liu, S. , H. D. Mac, S. Clénet, T. Coorevits, and J.-C. Mipo;”Study of the Influence of the Fabrication Process Imperfections on the Performance of a Claw Pole Synchronous Machine Using a Stochastic Approach” IEEE TRANSACTIONS ON MAGNETICS, VOL. 52, NO. 3, MARCH 2016.

Mac, D. H., Clénet, S., Mipo, J.-C., and Moreau, O., “Solution of static field problems with random domains,” IEEE Trans. Magn., vol. 46, no. 8, pp. 3385–3388, Aug. 2010.

Mac, D. H. , « Résolution numérique en électromagnétisme statique de problèmes aux incertitudes géométriques par la méthode de transformation: Application aux machines électriques », Ph.D. dissertation, L2EPLab., ENSAM, Lille, France, 2012.

Mathur, S. R., and Murthy, J. Y., (1997). A Pressure-Based Method for Unstructured Meshes, Numer. Heat Transfer Part B, Vol. 31, pp. 195–215.

Nguyen, T. T., Mac, D. H., and Clénet, S., “Uncertainty quantification using sparse approximation for models with a high number of parameters:Application to a magnetoelectric sensor,” IEEE Trans. Magn.,vol. 52, no. 3, Mar. 2016, Art. no. 7206404.

Nguyen, T. T. and Clénet, S. “Influence of material and geometric parameters on the sensor based on active materials,” IEEE Trans. Magn.,vol. 54, no. 3, Mar. 2018, Art. no. 7200904.

NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods, <http://www.itl.nist.gov/div898/handbook/>, April2012.

Panhuise, Vicki. E., Introduction to Quantitative Nondestructive Evaluation, Allied-Signal Aerospace Company, Garrett Engine Division, 1989.

Pettit, D, and Hoepfner, D, 1972 Fatigue flaw growth and NDT evaluation for preventing through cracks in spacecraft tankage structures. Technical report CR NAS 9-11722 LR 25387, NASA.

Press, W. H. Teukolsky, S. A. Vetterling, W. T., and Flannery, B. P., “Numerical recipes in C: the art of scientific computing”, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1992.

Rosell, A. , G. Persson, “Finite element modelling of closed cracks in eddy current testing”, International Journal of Fatigue 41 (2012) 30–38.

Saltelli A., M. Ratto, S. Tarantola et F. Campolongo, (2006): Sensitivity analysis practices: Strategies for model-based inference. *Reliability Engineering and System Safety*;91 :1109–1125.

Schmerr, L.W., Song, J.S.,: Ultrasonic Nondestructive Evaluation Systems: Models and Measurements. Springer, Berlin (2007).

Tools for Integrity Assessment Project Technical Report. EPRI, Palo Alto, CA: 2006 1014567.

Updates on the Tools for Integrity Assessment Project. EPRI, Palo Alto, CA: 2007 1014756.

Measuring and Monitoring Noise in Steam Generator Tubing Eddy Current Data for Tube Integrity Applications, EPRI, Palo Alto, CA: 2008. 1016554.

Silverman. B. W., “Density Estimation for Statistics and Data Analysis”, Chapman and Hall, London, 1986.

Rosenblatt, M. (1952)., Remarks on a multivariate transformation. *Ann. Math. Stat.* 23, 470–472.

Ross Sheldon M, “A first course in probability, fifth edition”, PRENICE HALL, New Jersey, 1997.

Sobol’, I. M., (1993). Sensitivity estimates for nonlinear mathematical models. *Math. Modeling & Comp. Exp.* 1, 407–414.

Sobol, I. M., “Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates”, *Mathematics and Computers in Simulation* 55 (2001) 271–280.

Soize, C. and R. Ghanem (2004). Physical systems with random uncertainties: chaos representations with arbitrary probability measure. *SIAM J. Sci. Comput.* 26(2), 305-410.

Song, S. J., Y. K. Shing, “Eddy current flaw characterization in tubes by neural networks and finite element modelling”, *NDT&E international* 33, 2000, pp. 233-243.

Sudret, B., and A. Der Kiureghian, (2000). Stochastic finite elements and reliability: a state of-the-art report. Technical Report UCB/SEMM-2000/08, University of California, Berkeley. 173 pages.

Sudret, B. “Uncertainty propagation and sensitivity analysis in mechanical models contributions to structural reliability and stochastic spectral methods”, HDR, université Blaise Pascal-Clermont II, 2007.

Sudret, B., (2008), Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansions, *Reliab. Eng. Syst. Safety*, 93, 964 – 979.

Stepinski, T., Uhl, T., and Staszewski, W., Advanced Structural Damage Detection: From Theory to Engineering Applications, First Edition. © 2013 John Wiley & Sons, Ltd. Published 2013 by John Wiley & Sons, Ltd.

Tonti, E., “Algebraic topology and computational electromagnetism”. In International Workshop on electric and magnetic Fields, pp 20-21, 2000.

Tonti, E., « Finite formulation of electromagnetic fields », In, ICS Newsletter, Vol. 8, No 1, pp5-12, 2001.

Trillon, A., Reconstruction de défauts à partir de données issues de capteurs à courants de Foucault avec modèle direct différentiel, Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, 2010.

Versteeg, H.K., Malalasekera, W., “An Introduction to Computational Fluid Dynamic”, The Finite Volume Method, Longman, 1995.

Wiener, N., (1938), The homogeneous chaos, Am. J. Math., 60, 897 – 936.

Xiu, D. Tartakovsky, D.M. Numerical methods for differential equations in random domains. SIAM J.SCI COMPUT, vol. 28, no. 3, pp. 1167-1185, 2006.

Yee, B. G. W., Chang, F. H., Couchman, J. C., Lemon, G. H., Packman, P. F. (1976), “Assessment of NDE reliability data”. Technical report, NASA.

Zhiwei Zeng, “Applications of POD studies and robust design to electromagnetic NDE”, PhD thesis 2003 Iowa State University.

ملخص: احتمالية الكشف هي طريقة لقياس قدرة نظام معين في الاختبار الغير متلف لاكتشاف العيوب في الهياكل الصناعية. هذا القياس يأخذ بعين الاعتبار التغيرات العشوائية في المعاملات المميزة للنظام (هندسية، فيزيائية ...) والخاصة بالمشكل المدروس. وهذا من اجل تقدير تأثير هذه التغيرات للمعاملات على الكشف على العيب للهيكल المستهدف. في هذه الرسالة نهتم بتقدير احتمالية الكشف على العيب للنظام غير متلف بتيارات فوكو. بتركز هذه الأطروحة على ثلاثة طرائق نقدر من خلالها تقدير احتمالية الكشف، اثنان يعتمدان على طريقة مونت كارلو للنموذج المباشر والثالثة تعتمد على كثير الحدود العشوائي. الطرائق الثلاثة تم مقارنتها من حيث الدقة ووقت الحساب. طريقة التحويل الهندسي تعتمد على تجنب اعادة طلب النموذج الهندسي المباشر وبذلك التقليل من وقت الحساب والأخطاء الناجمة من إعادة التشبيك، أما طريقة كثير الحدود العشوائي تسمح بتقليل النموذج المباشر سواء بطريقة التشبيك أو التحويل الهندسي. من خلال النتائج المتحصل عليها استطعنا تحديد طريقة كثير الحدود العشوائي حيث كانت الدقة جد عالية ووقت الحساب جد قصير.

الكلمات المفتاحية: احتمالية الاكتشاف، اختبار غير متلف بواسطة تيارات فوكو، طريقة الحجوم المحدودة، النمذجة العشوائية، قياس الارتياح، كثير الحدود العشوائي، التحويل الهندسي.

Résumé : La probabilité de détection est une méthode consiste à quantifier la capacité de détection d'un système de contrôle non destructif. Cette quantification prend en compte les incertitudes des paramètres caractéristiques du système considéré à savoir ses paramètres physique et géométrique. Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'estimation de la probabilité de détection d'un problème de contrôle non destructif par courants de Foucault. Dans ce travail on insiste sur trois approches avec lesquelles nous estimons la probabilité de détection, deux basées sur la méthode de Monte Carlo, et la troisième basée sur une expansion de chaos polynomial des paramètres aléatoires. Ces approches sont comparées en termes de précision et de coût de calcul. La méthode de transformation géométrique a été exploitée dans cette thèse, cette technique remplace le remaillage. Elle permet de réduire considérablement le temps de calcul et les erreurs dues au remaillage. Les résultats obtenus nous ont permis de choisir la méthode basée le chaos polynomial à cause de sa précision et la nécessité d'un temps de calcul très réduit.

Mots clés : probabilité de détection, contrôle non destructif par courants de Foucault, méthode des volumes finis, modélisation stochastique, quantification d'incertitudes, chaos polynomial, transformation géométrique.

Abstract: Probability of detection is a method of quantifying the detection capability of a non-destructive testing system. This quantification takes into account the uncertainties of the characteristic parameters of the considered system, such its physical and geometric parameters. In this thesis, we are interested in estimating the probability of detection of a non-destructive eddy current testing problem. In this work we insists on three approaches with which we estimate the probability of detection, two based on the Monte Carlo method, and the third one based on a polynomial chaos expansion of the random parameters. These approaches are compared in terms of precision and computational cost. The geometrical transformation method was exploited in this thesis, this technique replaces the re-meshing. It considerably reduces the calculation time and errors due to re-meshing. The results obtained allowed us to choose the method based on polynomial chaos because of its precision and the need for a very short computation time.

Keywords: Probability of detection, non destructive eddy current testing, finite volume method, stochastic modelling, uncertainties quantification, chaos polynomial, geometric transformation.